جمهورية العراق
رئاسة ديوان الوقف السنّي
دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية
شعبة المناهج والتطوير

الرياضيات

للصف الخامس الثانوي

د. قاسم حسين علاوي   د. عبد الواحد حميد ثامر

تنقيح لجنة الرياضيات
في دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية

إياد أنور إبراهيم

عبد الجبار توفيق صالح   نصير وليد خالد

سحر ليث نوري   حسين محمد علي محمود

الطبعة السادسة

١٤٣٩ هـ   ٢٠١٨ م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ لِّيَعۡلَمَ أَن قَدۡ أَبۡلَغُواْ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمۡ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيۡهِمۡ وَأَحۡصَىٰ كُلَّ شَيۡءٍ عَدَدَۢا ﴿٢٨﴾ ﴾

الجن: ٢٨

صدق الله العظيم

مقدمة المؤلفين

إن هذا الكتاب هو الكتاب الخامس من سلسلة الكتب التي تم تأليفها للثانويات الإسلامية على وفق منهج يفيد الدارس في هذه الثانويات لتطوير أساليب تفكيره ويحثه على الاستنتاج المنطقي والتحليل لمواكبة التطورات العلمية المعاصرة.

ويُعَدُّ هذا الكتاب مكملاً لما درسه الطالب في السنوات السابقة ويتكون من خمسة فصول يتضمن الفصل الأول موضوع المصفوفات التي تلعب دوراً كبيراً لاستخدامها لحل كثير من المسائل والمعادلات في الرياضيات والاقتصاد والاجتماع وغيرها.

وتطرق الفصل الثاني لموضوع الدائرة وكيفية إيجاد معادلتها في الحالتين العامة والقياسية وشمل الفصل الثالث موضوع المتتاليات العامة والمتتاليات العددية والهندسية خاصة.

أما في الفصل الرابع تناولنا موضوع الأسس والجذور واللوغاريتمات لأهميتها واستخداماتها الكثيرة. أما الفصل الأخير فتضمن موضوع الإحصاء إذ شمل موضوع مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وأهميتها.

وأخيراً وليس آخراً نرجو من الله العلي القدير أن يوفق أبنائنا الطلبة لما فيه خير لهم ولبلدنا العزيز آملين من اخواننا وزملائنا المدرسين موافاتنا بملاحظاتهم وآرائهم القيمة لتطوير المنهج، والله الموفق.

والحمد لله رب العالمين.

المؤلفان

١٤٢٧هـ - ٢٠٠٦ م

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد رسول الله وعلى آله وصحبه أجمعين
أما بعد ...

فإن لجنة الرياضيات في دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية في ديوان الوقف السنّي في جمهورية العراق تهنئ طلبتنا الأعزاء بالعام الدراسي الجديد وتقدم لهم الطبعة الثالثة من كتاب الرياضيات للصف الخامس الثانوي. وهي إذ تشيد بجهود الأستاذين الفاضلين مؤلفَي الكتاب، فإنه يسعدها أن تقدم بتواضع بالغ إضافات ترى أنها ضرورية لإثراء الكتاب وإخراجه بشكل أفضل وتساعد على حصول الفائدة المتوخاة منه والنهوض بالمستوى العلمي لطلبة المدارس الإسلامية. وقد تمثلت هذه الإضافات والتغييرات في تغيير شكل وحجم الطباعة وإدخال الألوان في إخراج الكتاب وكتابة القوانين والملاحظات بخط أكبر وأوضح وضمن إطار ملون، وتقديم فصل الأسس والجذور وجعله الفصل الثالث على فصل المتتاليات (الفصل الرابع)، وإضافة بعض القواعد للأسس والتي يحتاجها الطالب في الصف السادس. وقد تم إضافة مجموعة من الأمثلة الواقعية حول موضوع (المتتاليات)، وحذف موضوع (مجموع المتتالية الهندسية) من الفصل الرابع، أما في الفصل الخامس (الإحصاء) فقد تم حذف موضوع (مقاييس التشتت). كما قامت اللجنة بإثراء فصول الكتاب جميعها بأمثلة محلولة، وأسئلة متنوعة.

واستمراراً في نهجنا في تعريف طلبتنا الأعزاء بعلماء المسلمين القدماء الذين كان لهم الفضل في تطوير علم الرياضيات والهندسة، والذي شرعنا به منذ الصف الأول فسنتعرف في الصف الخامس على عالِمنا الجليل (ابن سينا).

ندعو الله أن ينتفع طلبتنا بما يتعلمون ويتقبل منّا ومنهم صالح الأعمال ويغفر لنا ولهم الزلل والخطأ ويكتبنا عنده في الصالحين المصلحين، ويهدينا بهديه لما يحبه ويرضاه ...

﴿إِنَّ رَبي قَرِيبٌ مُجِيبٌ﴾ هود: ٦١

لجنة تقويم منهج الرياضيات
في
دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية

ابن سينا
(٣٧٠-٤٢٧هـ/ ٩٨٠-١٠٣٧م)

هو أبو علي الحسين بن عبدالله بن الحسن بن علي بن سينا عالم وطبيب مسلم من بخارى اشتهر بالطب والفلسفة واشتغل بهما، عرف باسم **(الشيخ الرئيس)** وسماه الغربيون بـ**(أمير الأطباء وطبيب الأمراء)** و**(أبو الطب الحديث)**.

مولده ونشأته:

ولد سنة ٣٧٠هـ /٩٨٠م في قرية (أفشنة) بالقرب من بخارى (في اوزبكستان حالياً) لأب من مدينة بلخ (في أفغانستان حالياً) وأم قروية، وتوفي في همدان بايران سنة ٤٢٧هـ/١٠٣٧م. نشأ نشأة دينية فحفظ القرآن كله وهو في السابعة من عمره. وظهرت عبقريته منذ الطفولة، فدرس الأدب العربي والفقه الإسلامي وهو في العاشرة، ثم درس الحساب والمنطق والفلسفة، ثم اتجه بشغف إلى علوم الطب. فلم يبلغ السابعة عشرة حتى كان طبيباً ممارساً يباري في علمه وحذقه كبار الأطباء ويتفوق عليهم. وذاع صيته حتى وصل إلى سلطان بخارى (نوح بن منصور)، فاستدعاه لعلاجه من مرض عجز الأطباء عن شفائه. فلما شفي على يديه أراد السلطان أن يكافئه فطلب منه ابن سينا أن يسمح له بالاطلاع على مكتبته الخاصة التي كانت من أشهر وأضخم مكتبات العالم الإسلامي حينئذ، حيث كان فيها حجرات تشمل كتب الطب، وأخرى للفلسفة وأخرى للشعر وأخرى للفقه والدين. فعكف ابن سينا على قراءة المخطوطات النادرة، وبعضها لم يكن لها مثيل في أي مكان آخر. وكان له شغف بالقراءة حتى كان يأكل ويصلي وينام بجوار الكتب. وبعد أن استوعب كل ما فيها خرج إلى الدنيا وقد أصبح من علماء عصره. وقد تصادف أن احترقت مكتبة السلطان بعد ذلك فاتهمه حسّاده أمام السلطان بأنه تعمد إحراقها بعد أن حفظ كل ما فيها من علم حتى لا يجاريه أحد في علمه، وهي تهمة بعيدة عن مثل هذا العالم الكبير.

كان ابن سينا دمث الخلق محافظاً على الصلاة يؤدي الزكاة ويتصدق بسخاء، ويذكر في مذكراته

أنه كان إذا عجز عن حل مسألة علمية يعكف في المسجد بعد الصلاة يفكر فيها فإذا اهتدى إلى الحل تصدق بمبلغ كبير من المال على الفقراء شكراً لله، وكان يعتز بمكانته العلمية والأدبية بين الناس، وبفضل تربيته الإسلامية وجه علمه لخدمة الإنسانية.

مؤلفاته:

شرع **ابن سينا** يؤلف المصنفات الضخمة وهو في سن العشرين ، حيث كان يؤلف خمسين صفحة في اليوم الواحد. وكان يكتب حتى أثناء السفر، وبلغت مؤلفاته (٣٣٥) مصنفاً وكتاباً في شتى فروع العلم. ويعد ابن سينا من أوائل من كَتَبَ في الطبّ في العالم ولقد اتبع نهج وأسلوب أبقراط وجالينوس. ومن أشهر كتبه كتاب **(القانون)** في الطب ويقع في خمسة مجلدات كبيرة، وقد ترجم وطبع عدّة مرات وظل يُدرَّس في جامعات أوروبا حتى أواخر القرن التاسع عشر. وله أيضاً كتاب **(الشفاء)** في العلاج بالأدوية، وكتاب **(الأرصاد الكلية)** في الفلك، و**(المبدأ والمعاد)** في النفس، و**(رسالة الزاوية)** و**(المجموع)** في الرياضيات ، وغيرها كثير.

تأثيره في العلم الحديث:

يعتبر ابن سينا أول مكتشف لقانون الحركة الأول قبل إسحق نيوتن، وهو أول من اخترع المخدر قبل الجراحة وسماه (المرقد) وكذلك اخترع أول حقنة لحقن الأدوية في الجسم وسماها (الزراقة) وابتكر أول جراحة للأعصاب المقطوعة. واكتشف مرض شلل عصب الوجه، وهو أول من وضع قواعد جراحة السرطان والتي هي قواعد العلاج الجراحي لهذا المرض في الطب الحديث، ووصف الكثير من الأمراض العضوية التي تنجم عن التوتر العصبي.

الفصل الأول

المصفوفات

قَالَ تَعَالَى: ﴿ مُتَّكِـِٔينَ عَلَىٰ سُرُرٍ مَّصۡفُوفَةٖۖ وَزَوَّجۡنَٰهُم بِحُورٍ عِينٖ ﴿٢٠﴾ ﴾ الطور

وقَالَ تَعَالَى: ﴿ وَنَمَارِقُ مَصۡفُوفَةٞ ﴿١٥﴾ ﴾ الغاشية

(١-١)مقدمة وتعريفات

يمكن تنظيم وترتيب الكثير من المعلومات بشكل جدول يتضمن عدداً من الصفوف وعدداً من الأعمدة، مثل جدول الدروس الأسبوعي وكذلك قائمة درجات الطلاب، وقائمة رواتب الموظفين وغيرها. إن عملية تبويب هذه المعلومات بالطريقة الجدولية وتنظيمها تسهل عملية دراسة هذه المعلومات وتحليلها وتجميعها واستنتاج ما يفيد الدارس والمجتمع منها وهذا الترتيب يسمى **بالمصفوفة**، وهي مفرد كلمة **مصفوفات** التي تعدُّ من مفاهيم الرياضيات التي تلعب دوراً مهماً في كثير من العلوم. واستعملها أول مرة العالم كيلي (١٨٢١–١٨٩٥م).

المصفوفات:

هي عبارة عن ترتيب مستطيلي الشكل من الأعداد مؤلفة من م من الصفوف، ن من الأعمدة، وعدد عناصرها هو م × ن عنصر (أي عدد من أعداد المصفوفة يسمى عنصر). ويرمز لها بحرف (أ ، ب، ك، ...) ، وعناصرها تحصر بين القوسين [ ].

وتتحدد سعة المصفوفة (درجتها) بعدد صفوفها وعدد أعمدتها.

أمثلة عن المصفوفات ($أ_{١×١}$ ، $ب_{٢×٢}$، $ج_{١×٣}$ ، $د_{٢×٣}$):

$أ = \begin{bmatrix} ٣ \end{bmatrix}_{١×١}$ (صف واحد وعمود واحد)

$ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}_{٢×٢}$ (صفان وعمودان)

ج = $\begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٦ \end{bmatrix}_{٣\times١}$ (صف واحد وثلاثة أعمدة) د = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ٤ & ٧ & -٥ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$ (صفان وثلاثة أعمدة)

فالمصفوفة أ سعتها (١×١) ، والمصفوفة ب سعتها (٢×٢) ، والمصفوفة ج سعتها (١×٣) ، والمصفوفة د سعتها (٢×٣) .

(١-٢) بعض أنواع المصفوفات

١- **المصفوفة المربعة:** هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها مساوياً لعدد أعمدتها. مثل:

$$أ = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}_{٢\times٢} \qquad ب = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٦ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}_{٣\times٣}$$

وللمصفوفة المربعة قطران، قطر رئيسي يتكون من العناصر التي تبدأ من أقصى اليمين إلى أدنى اليسار، وقطر ثانوي يتكون من العناصر التي تبدأ من أقصى اليسار إلى أدنى اليمين. فعناصر القطر الرئيسي للمصفوفة أ هي ((١ ، ٠))، وعناصر قطرها الثانوي هي ((-٢ ، ٧)). أما المصفوفة ب فعناصر قطرها الرئيسي هي ((٦ ، -٢ ، ١))، وعناصر قطرها الثانوي هي ((١ ، -٢ ، ٧)).

٢- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي. مثل:

$$ج = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}_{٢\times٢} \qquad د = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}_{٣\times٣}$$

٣- **المصفوفة الواحدية:** هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي العدد واحد. مثل:

$$هـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}_{٢\times٢} \qquad و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}_{٣\times٣}$$

٤- **المصفوفة الصفرية:** هي المصفوفة التي جميع عناصرها صفر. مثل:

$$ز = \begin{bmatrix} ٠ \end{bmatrix}_{١\times١} \qquad ح = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}_{٣\times٣} \qquad ط = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}_{١\times٢}$$

(١-٣)تساوي المصفوفات:

تتساوى المصفوفتان اللتان لهما نفس السعة إذا وفقط إذا تساوت العناصر المتناظرة فيهما (العناصر المتناظرة هي العناصر التي لها الموقع نفسه في المصفوفتين).

مثال ١: للمصفوفتين المتساويتين أ ، ب جد قيمة كل من س ، ص ، ع ، ك حيث أن:

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ك} & \text{ع} \end{bmatrix}$$

الحل: ∵ المصفوفتين متساويتان

∴ العناصر المتناظرة فيهما متساوية

∴ س = -١ ، ص = ٣ ، ع = ٢ ، ك = ٤

مثال ٢: إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ & ٣\text{أ}-٤ \\ ٩\text{ب} & ٢\text{ج} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥\text{د} & ٥ \\ ٦\text{أ} & ١٠ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من أ ، ب ، ج ، د ؟

الحل: ∵ المصفوفتين متساويتان

∴ العناصر المتناظرة فيهما متساوية

أي أن: ٣أ-٤ = ٥ ⇐ ٣أ = ٥+٤ ⇐ ٣أ = ٩ ⇐ أ = ٣

، ٥ = ٥د ⇐ د = ١

، ٢ج = ١٠ ⇐ ج = ٥

، ٩ب = ٦أ ⇐ ٩ب = ٦×٣ ⇐ ٩ب = ١٨ ⇐ ب = ٢

(١-٤)محدد المصفوفة:

محدد المصفوفة عبارة عن عدد يقترن مع كل مصفوفة مربعة ويرمز له بالرمز | |.

وتعتمد طريقة إيجاده على سعة المصفوفة (عدد الصفوف وعدد الأعمدة).

أولاً: محدد المصفوفة التي سعتها ٢×٢ :

إن محدد المصفوفة التي سعتها ٢×٢ هو عبارة عن حاصل ضرب عنصري قطرها الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري قطرها الثانوي. فإذا كانت:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س}_1 & \text{ص}_1 \\ \text{س}_2 & \text{ص}_2 \end{bmatrix}$$
فإن $|\text{أ}| = \text{س}_1 \times \text{ص}_2 - \text{ص}_1 \times \text{س}_2$

مثال ١: جد محدد كل من المصفوفتين الآتيتين:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: $|\text{أ}| = (-3)\times 5 - 2\times 1 = -15 - 2 = -17$

$|\text{ب}| = 5\times(-1) - (-6)\times 2 = -5 + 12 = 7$

ثانياً: محدد المصفوفة التي سعتها ٣×٣ :

لتكن $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{س}_1 & \text{ص}_1 & \text{ع}_1 \\ \text{س}_2 & \text{ص}_2 & \text{ع}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ص}_3 & \text{ع}_3 \end{bmatrix}$ مصفوفة ذات سعة ٣×٣

فلإيجاد محدد المصفوفة نكرر العمودين الأول والثاني للمصفوفة بعد العمود الثالث وكالآتي:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \text{س}_1 & \text{ص}_1 & \text{ع}_1 & \text{س}_1 & \text{ص}_1 \\ \text{س}_2 & \text{ص}_2 & \text{ع}_2 & \text{س}_2 & \text{ص}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ص}_3 & \text{ع}_3 & \text{س}_3 & \text{ص}_3 \end{array}\right.$$

وعليه يكون محدد المصفوفة عبارة عن مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية مطروحاً منه مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الثانوية. أي:

$$|\text{ب}| = (\text{س}_1\text{ص}_2\text{ع}_3 + \text{ص}_1\text{ع}_2\text{س}_3 + \text{ع}_1\text{س}_2\text{ص}_3) - (\text{ع}_1\text{ص}_2\text{س}_3 + \text{س}_1\text{ع}_2\text{ص}_3 + \text{ص}_1\text{س}_2\text{ع}_3)$$

مثال ٢: جد محدد كل من المصفوفتين الآتيتين:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{array}{ll} ١ & ٢ \\ ١- & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{array}\left|\begin{array}{lll} ٣ & ١ & ٢ \\ ٢- & ١- & ٣ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{array}\right| = أ$$

$$[١×٣×١+٢×(٢-)×٣+٣×(١-)×٢] - [٣×٣×٣+٢×(٢-)×١+١×(١-)×٢] = |أ|$$

$$٣٦ = ١٥ + ٢١ = (١٥-) - ٢١ = (٣+١٢-٦-) - (٢٧+٤-٢-) =$$

$$\begin{array}{ll} ٢- & ١ \\ ٦ & ٢ \\ ٤ & ٧- \end{array}\left|\begin{array}{lll} ٣ & ٢- & ١ \\ ١ & ٦ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٧- \end{array}\right| = ب$$

$$[(٢-)× ٢×٥ + ١×١×٤ + ٣×٦×(٧-)] - [٤×٢×٣ + (٧-)×١×(٢-) + ٥×٦×١] = |ب|$$

$$٢١٠ = ١٤٢ + ٦٨ = (١٤٢-) - ٦٨ = (٢٠-٤+١٢٦-) - (٢٤+١٤+٣٠) =$$

مثال٣: إذا كان $\left|\begin{array}{ll} س & ٣ \\ ٥- & ٦ \end{array}\right| = ٣$ فما قيمة س ؟

الحل: س ×٦ − [(−٥) ×٣] = ٣

٦س+١٥ = ٣

٦س = −١٢

س= −٢

مثال٤: إذا كان $\left|\begin{array}{ll} ١ & ١١ \\ ب & ٧- \end{array}\right| = ٤$ ، فما قيمة ب؟

الحل: (١ × −٧) − (١١ × ب) = ٤

−٧ − ١١ب = ٤

−١١ ب = ٤ + ٧

−١١ ب = ١١

∴ ب = −١

(١-٥)استخدام المصفوفات لحل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى:

أولاً: إذا أعطينا النظام الخطي المؤلف من معادلتين آنيتين بالشكل:

$أ_{١} س + ب_{١} ص = ل_{١}$ ....(١)

$أ_{٢} س + ب_{٢} ص = ل_{٢}$ ....(٢)

فيمكن كتابة هذا النظام بالصيغة :

$$\begin{bmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ل_{١} \\ ل_{٢} \end{bmatrix}$$

حيث أن: $\begin{bmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{bmatrix}$ تسمى **مصفوفة معاملات** النظام وسنرمز لمحددها بالرمز Δ

وأن: $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ **مصفوفة (عمود) المجاهيل**

وأن: $\begin{bmatrix} ل_{١} \\ ل_{٢} \end{bmatrix}$ **مصفوفة (عمود) الحدود المطلقة**

وباستبدال العمود الأول من مصفوفة المعاملات بعمود الحدود المطلقة نحصل على المصفوفة:

$\begin{bmatrix} ل_{١} & ب_{١} \\ ل_{٢} & ب_{٢} \end{bmatrix}$ ويسمى محدد هذه المصفوفة بمحدد المجهول الأول ونرمز له بالرمز $\Delta_{س}$

وباستبدال العمود الثاني من مصفوفة المعاملات بعمود الحدود المطلقة نحصل على المصفوفة:

$\begin{bmatrix} أ_{١} & ل_{١} \\ أ_{٢} & ل_{٢} \end{bmatrix}$ ويسمى محدد هذه المصفوفة بمحدد المجهول الثاني ونرمز له بالرمز $\Delta_{ص}$

إن قيم المجاهيل س , ص تحدد بالعلاقتين الآتيتين:

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$$

وتسمى هذه الطريقة في حل المعادلات الآنية **بطريقة كرايمر.**

مثال١: جد الحل للنظام الخطي الآتي :

٢س − ٣ص = ٧

٣س + ص = ٥

الحل: من الواضح بأن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - [(-٣)\times٣] = ٢ + ٩ = ١١$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٧ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٧ \times ١ - [(-٣) \times ٥] = ٧ + ١٥ = ٢٢$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ - (٧\times٣) = ١٠ - ٢١ = -١١$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٢٢}{١١} = ٢$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-١١}{١١} = -١$$

مثال٢: جد الحل للمعادلتين الآتيتين باستخدام طريقة كرايمر:

٢ص + ٣س = ٠

٥س − ص = ١٣

الحل: بعد ترتيب المعادلة الأولى بالشكل: ٣س + ٢ص = ٠

نجد كلاً من Δ ، $\Delta_{\text{س}}$ ، $\Delta_{\text{ص}}$ كالآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix} = ٣\times(-١) - ٢\times٥ = -٣ - ١٠ = -١٣$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١٣ & -١ \end{vmatrix} = ٠\times(-١) - ٢\times١٣ = ٠ - ٢٦ = -٢٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ٥ & ١٣ \end{vmatrix} = ٣\times١٣ - ٠\times٥ = ٣٩ - ٠ = ٣٩$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٢٦}{-١٣} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٣٩}{-١٣} = -٣$$

ملاحظة:

إذا كان محدد مصفوفة معاملات النظام (Δ) يساوي صفراً ، فإن النظام ليس له حل.

مثل النظام الخطي الآتي:

2س $+$ ص $= -6$ ، س $+ \frac{1}{2}$ ص $= 5$

يكون فيه: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2\times\frac{1}{2} - 1\times1 = 1 - 1 = 0$

لذا فالمعادلتان ليس لهما حل.

مثال٣: جد قيمة ب التي تجعل للنظام الخطي الآتي حلاً:

س $+$ ب ص $= 0$ ، 3س $-$ ص $= 0$

الحل: يكون للنظام الخطي حلاً إذا كان محدد مصفوفة معاملات النظام لا يساوي صفراً. اي أن:

$\begin{vmatrix} 1 & ب \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq$ صفر

$\therefore (-1) - 3ب \neq 0$

$-3ب \neq 1$

ب $\neq \frac{1}{-3}$

$\therefore$ يكون للنظام حلاً إذا كان ب $= \{$ س : س $\in$ ح $/ \{ \frac{-1}{3} \} \}$

ثانياً: إذا كان النظام الخطي من المعادلات يتألف من ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل والتي تأخذ الشكل:

$أ_1$ س $+ ب_1$ ص $+ ج_1$ ع $= ل_1$ ....(١)

$أ_2$ س $+ ب_2$ ص $+ ج_2$ ع $= ل_2$ ....(٢)

$أ_3$ س $+ ب_3$ ص $+ ج_3$ ع $= ل_3$ ....(٣)

فإن محدد مصفوفة المعاملات :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{ج}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{ج}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{ج}_{٣} \end{vmatrix}$$

والذي نحصل منه على $\Delta_{\text{س}}$ باستبدال العمود الأول بعمود الحدود المطلقة، وكذلك $\Delta_{\text{ص}}$ باستبدال العمود الثاني بعمود الحدود المطلقة، و $\Delta_{\text{ع}}$ باستبدال العمود الثالث بعمود الحدود المطلقة. فيكون:

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$$

وهذا تعميم لطريقة كرايمر لحل النظام الخطي الثلاثي.

مثال ٤ : جد الحل لنظام المعادلات الآتي:

٢س + ٢ص + ٣ع = ٥

٤س + ص + ع = ٣

٢س + ٣ص − ع = −٤

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{matrix}$$

= [٢×١×(−١) + ٢×١×٢ + ٣×٤×٣] − [٣×١×٢ + ٢×١×٣ + ٢×٤×(−١)]

= (−٢+٤+٣٦) − (٦+٦−٨)

= ٣٨−٤

= ٣٤

$$\Delta_{\text{س}} = \left|\begin{array}{ccc}٥ & ٢ & ٣\\ ٣ & ١ & ١\\ -٤ & ٣ & -١\end{array}\right|\begin{array}{cc}٥ & ٢\\ ٣ & ١\\ -٤ & ٣\end{array}$$

= [٥×١×(-١) + ٢×١×(-٤) + ٣×٣×٣] – [٣×١×(-٤) + ٥×١×٣ + ٢×٣×(-١)]

= (-٥-٨+٢٧) – (-١٢+١٥-٦)

= ١٤-(-٣)

= ١٤+٣

= ١٧

$$\Delta_{\text{ص}} = \left|\begin{array}{ccc}٢ & ٥ & ٣\\ ٤ & ٣ & ١\\ ٢ & -٤ & -١\end{array}\right|\begin{array}{cc}٢ & ٥\\ ٤ & ٣\\ ٢ & -٤\end{array}$$

= [٢×٣×(-١) + ٥×١×٢ + ٣×٤×(-٤)] – [٣×٣×٢ + ٢×١×(-٤) + ٥×٤×(-١)]

= (-٦+١٠-٤٨) – (١٨-٨-٢٠)

= -٤٤ - (-١٠)

= -٤٤+١٠

= -٣٤

$$\Delta_{\text{ع}} = \left|\begin{array}{ccc}٢ & ٢ & ٥\\ ٤ & ١ & ٣\\ ٢ & ٣ & -٤\end{array}\right|\begin{array}{cc}٢ & ٢\\ ٤ & ١\\ ٢ & ٣\end{array}$$

= [٢×١×(-٤) + ٢×٣×٢ + ٥×٤×٣] – [٥×١×٢ + ٢×٣×٣ + ٢×٤×(-٤)]

= (-٨+١٢+٦٠) – (١٠+١٨-٣٢)

= ٦٤ - (-٤)

= ٦٤+٤

= ٦٨

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١٧}{٣٤} = \frac{١}{٢}$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٣٤}{٣٤} = -١$$

$$ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٦٨}{٣٤} = ٢$$

مثال٥: حلّ نظام المعادلات الآتي:

$٢س - ص + ٣ع = ١$

$٣س + ٢ص = ٢$

$ع - س = ٣$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{matrix}$$

$$= [٢×٢×١ + (-١)×٠×(-١) + ٣×٣×٠] - [٣×٢×(-١) + ٢×٠×٠ + (-١)×٣×١]$$

$$= (٤+٠+٠) - (-٦+٠-٣) = ٤+٩ = ١٣$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{matrix}$$

$$= [١×٢×١ + (-١)×٠×٣ + ٣×٢×٠] - [٣×٢×٣ + ١×٠×٠ + (-١)×٢×١]$$

$$= (٢+٠+٠) - (١٨+٠-٢) = ٢-١٦ = -١٤$$

$$\begin{array}{cc|ccc|} ١ & ٢ & ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٠ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١- & ١ & ٣ & ١- \end{array} = \Delta_{\text{ص}}$$

$$[١×٣×١ + ٣×٠×٢ + (١-)×٢×٣] - [٣×٣×٣ + (١-)×٠×١ + ١×٢×٢] =$$

$$٣٤ = ٣+٣١ = (٣+٠+٦-) - (٢٧+٠+٤) =$$

$$\begin{array}{cc|ccc|} ١- & ٢ & ١ & ١- & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١- & ٣ & ٠ & ١- \end{array} = \Delta_{\text{ع}}$$

$$[٣×٣×(١-) + ٠×٢×٢ + (١-)×٢×١] - [٠×٣×١ + (١-)×٢×(١-) +٣×٢×٢] =$$

$$٢٥ = ١١+١٤ = (٩-٠+٢-) - (٠+٢+١٢) =$$

$$، \frac{١٤-}{١٣} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \text{س} \therefore$$

$$، \frac{٣٤}{١٣} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \text{ص}$$

$$\frac{٢٥}{١٣} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \text{ع}$$

تمارين (١-١)

١) جد قيم أ ، ب ، ج ، د إذا كان:

$$\begin{bmatrix} \text{أ}+٢ & ٣\text{ب}-١ \\ \text{أ}-٣ & -١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ \text{ج} & ٣\text{د}+٤ \end{bmatrix}$$

٢) جد مجموعة الحل للمعادلات الآتية:

أ) س − ٣ص = −٥
٢س − ٢ص = −٨

ب) ٢س − ٣ص = ١
س + ٢ص = ٠

ج) ٢س − ٣ص = ١
٤س + ٣ص = ٥

د) س − $\frac{٣}{٢}$ ص = ٢
٤س + ٥ ص = ١

٣) جد قيمة هـ التي تجعل للنظام الخطي الآتي حلاً:

٣س + هـ ص = ٤
− س − ٢ص = −١

٤) جد مجموعة الحل للمعادلات الآتية:

أ) −٢س + ٣ص − ع = ١
س + ٢ص − ع = ٤
−٢س − ص + ع = −٣

ب) س + ٢ص + ٣ع = ٣
٢س − ص − ٤ع = −٣
٣س − ص − ع = ٦

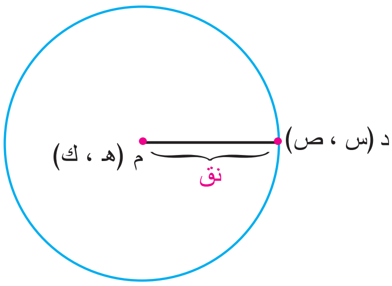
ج) ٢س + ٤ص − ٣ع = ١
٣س + ٦ص − ٥ع = ٠
س + ص + ٢ع = ٩

الفصل الثاني
معادلة الدائرة

(٢-١)تعريف الدائرة ومعادلتها القياسية

الدائرة: عبارة عن مجموعة النقاط في المستوي التي تبعد كل منها ببعد ثابت عن نقطة معلومة.

يسمى البعد الثابت (نصف قطر الدائرة)، وتسمى النقطة المعلومة (مركز الدائرة). وسنرمز لنصف القطر بـ(نق) ولإحداثيي مركز الدائرة م (هـ، ك).



وباستخدام قانون البعد بين نقطتين حيث م (هـ ، ك) ، د (س، ص)

، د نقطة تنتمي الى الدائرة، نحصل على العلاقة:

$$نق = \sqrt{(س - هـ)^٢ + (ص - ك)^٢}$$ وبتربيع الطرفين نحصل على العلاقة:

$$(س - هـ)^٢ + (ص - ك)^٢ = نق^٢ \quad .... (١)$$

تسمى العلاقة (١) **الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة.**

ملاحظات:

١- إذا علم مركز الدائرة (هـ، ك) ونصف قطرها **نق > ٠** يمكن إيجاد معادلة الدائرة مباشرة، وبالعكس.

إذا أُعطينا المعادلة القياسية للدائرة فيمكن مباشرة معرفة مركزها ونصف قطرها.

٢- كل زوج مرتب من الأعداد يحقق معادلة الدائرة يُعدّ نقطة من نقاطها، وبالعكس (اي أن كل نقطة من نقاط الدائرة تحقق معادلتها).

٣- حالة خاصة: للدائرة التي مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠) تكون المعادلة (١) كالآتي:

$$س^٢ + ص^٢ = نق^٢$$

مثال١: جد معادلة الدائرة التي مركزها (−٣، ٢) ونصف قطرها (٧) وحدات

الحل: $\because$ $(س - هـ)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$

$(س - (−٣))^{٢} + (ص−٢)^{٢} = ٧^{٢}$

$\therefore$ $(س+٣)^{٢} + (ص−٢)^{٢} = ٤٩$ الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

مثال٢: جد معادلة الدائرة التي مركزها (١، −٣) وتمر بنقطة الأصل.

الحل: $\because$ (١،−٣) مركز الدائرة ، والنقطة (٠، ٠) واحدة من نقاط الدائرة

$\therefore$ (٠،٠) تحقق معادلة الدائرة.

$(س - هـ)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$

$(٠−١)^{٢} + (٠ - (−٣))^{٢} = نق^{٢}$

$١+٩ = نق^{٢}$

$\therefore$ $نق^{٢} = ١٠$

وبالتعويض في معادلة الدائرة $(س - هـ)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$ نحصل على:

$(س−١)^{٢} + (ص−(−٣))^{٢} = ١٠$

$(س−١)^{٢} + (ص+٣)^{٢} = ١٠$ الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

مثال ٣: جد معادلة الدائرة التي مركزها (٠ ، ٢) وتمر بالنقطة (١، −٣).

الحل: نجد طول نصف القطر باستخدام قانون المسافة بين نقطتين:

$$نق = \sqrt{(س_{١} - س_{٢})^{٢} + (ص_{١} - ص_{٢})^{٢}}$$

$$نق = \sqrt{(٠ - ١)^{٢} + (٢ - (−٣))^{٢}}$$

$$نق = \sqrt{١ + ٢٥} = \sqrt{٢٦}$$

$$\therefore (س - ٠)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = (\sqrt{٢٦})^{٢}$$

$س^{٢} + (ص−٢)^{٢} = ٢٦$ الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

مثال٤: جد إحداثيي المركز وطول نصف القطر للدائرة التي معادلتها (س−٣)^{٢} + (ص+١)^{٢} =١٦.

الحل: ∵ المعادلة القياسية للدائرة هي: (س− هـ)^{٢} + (ص− ك)^{٢} = نق^{٢}

∴ إحداثيي المركز (هـ ، ك) = (٣ ، −١)

نق^{٢} = ١٦

∴ نصف القطر (نق) = ٤

مثال٥: جد معادلة الدائرة التي نهايتي أحد أقطارها النقطتان(٤، ٣) ، (−٢، ١).

الحل: من المعلوم بأن مركز الدائرة هو نقطة المنتصف لقطرها، و يمكن حسابها من القانون الآتي:

$$(\text{هـ} \text{ ، } \text{ك}) = \left(\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٤ + (-٢)}{٢} \text{ ، } \frac{٣ + ١}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٢}{٢} \text{ ، } \frac{٤}{٢} \right)$$

$$= (١ \text{ ، } ٢)$$

ولإيجاد نق تستخدم الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة:

نق^{٢} = (٤ −١)^{٢} + (٣ −٢)^{٢}

نق^{٢} = (٣)^{٢} + (١)^{٢} = ٩ +١ = ١٠

∴ (س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} =١٠ الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

(٢-٢) المعادلة العامة للدائرة:

بتبسيط الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة (فتح الأقواس): $(س - هـ)^٢ + (ص - ك)^٢ = نق^٢$

نحصل على: $س^٢ - ٢ هـ س + هـ^٢ + ص^٢ - ٢ ك ص + ك^٢ = نق^٢$

وبترتيب الحدود نحصل على: $س^٢ + ص^٢ - ٢هـ س - ٢ك ص + هـ^٢ + ك^٢ - نق^٢ = صفر$

ويمكن كتابتها بالصيغة:

$س^٢ + ص^٢ + أ س + ب ص + جـ = صفر$ ... (٢)

وتسمى العلاقة (٢) **بالمعادلة العامة للدائرة**، حيث أن:

أ = -٢هـ ومنها نحصل على: $هـ = \frac{-أ}{٢}$ ،

ب = -٢ ك ومنها نحصل على: $ك = \frac{-ب}{٢}$ ،

$حـ = هـ^٢ + ك^٢ - نق^٢$ ومنها نحصل على: $نق = \sqrt{هـ^٢ + ك^٢ - جـ}$ ، $نق > ٠$

مثال ١: جد المعادلة العامة للدائرة إذا كانت معادلتها القياسية $(س-١)^٢ + (ص+٣)^٢ = ٢٥$.

الحل: نقطة المركز (١، -٣)، $نق^٢ = ٢٥$

أ = -٢ هـ $\Leftarrow$ أ = -٢ × ١ = -٢

ب = -٢ ك $\Leftarrow$ ب = -٢ × -٣ = ٦

$حـ = هـ^٢ + ك^٢ - نق^٢ = (١)^٢ + (-٣)^٢ - ٢٥ = ١+٩ - ٢٥ = -١٥$

∴ المعادلة العامة للدائرة هي: $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٦ص - ١٥ = ٠$

مثال ٢: جد المعادلة القياسية للدائرة إذا كانت معادلتها العامة: $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ ص + ٧ = ٠$

الحل: أ = -٤ ، ب = ٦ ، حـ = ٧

$$المركز\ (هـ ، ك) = \left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{-(-٤)}{٢} ، \frac{-٦}{٢}\right) = (٢ ، -٣)$$

$$نق = \sqrt{هـ^٢ + ك^٢ - جـ} = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ - ٧}$$

$$= \sqrt{٤ + ٩ - ٧} = \sqrt{٦}$$

نق^{٢} = ٦

∴ المعادلة القياسية للدائرة هي: (س−٢)^{٢} + (ص +٣)^{٢} =٦

مثال٣: جد المعادلة العامة للدائرة التي تمر بالنقاط (٠، ٠) ، (٢، ٠) ، (٣، −١)

الحل: المعادلة العامة للدائرة هي:

س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + حـ = ٠ .... (١)

والنقطة (٠ ، ٠) تحقق هذه المعادلة.

∴ (٠)^{٢} + (٠)^{٢} + أ×٠ + ب×٠ + حـ = ٠ ⇐ حـ = صفر

كذلك النقطة (٢، ٠) تحقق المعادلة (١)

∴ (٢)^{٢} + (٠)^{٢} + أ (٢) + ب (٠) + ٠ = ٠

∴ ٢أ + ٤ = ٠ ⇐ أ = $\frac{-٤}{٢}$ = −٢

كذلك النقطة (٣، −١) تحقق المعادلة (١)

∴ (٣)^{٢} + (−١)^{٢} + ٣×أ + ب×(−١) + صفر = صفر

وبالتعويض عن قيمة أ

٩ + ١ + ٣×(−٢) − ب= ٠

١٠−٦ = ب

∴ ب = ٤

والمعادلة العامة للدائرة تصبح:

س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٤ص = صفر

تمارين (٢-١)

س١) جد معادلة الدائرة إذا علم:

أ) مركزها (−٥، −٣) وطول نصف قطرها ٦

ب) مركزها (−٢، ٥) وطول نصف قطرها ٤

ج) مركزها (٤، ٥) وتمر بالنقطة (٣، −٢)

د) مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة (٧، −٣)

هـ) أن نهايتي قطرها (٥، −٤)، (٤، ٣)

س٢) جد إحداثيات المركز وطول نصف القطر للدوائر التي معادلاتها:

أ) $(س-٣)^٢ + (ص+٢)^٢ = ٦٤$

ب) $(س+٤)^٢ + ص^٢ = ١٦$

ج) $٢س^٢ + ٢ص^٢ = ٧٢$

د) $س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٤ص = ٩$

هـ) $س^٢ + ص^٢ - ٣س - ٤ص = ٣٦$

و) $س^٢ + ص^٢ - ٨ص + ٦س - ٩ = ٠$

س٣) حوِّل معادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٢ص = ٤$ إلى الصيغة القياسية.

س٤) حوِّل معادلة الدائرة $(س-٥)^٢ + (ص+١)^٢ = ١٦$ إلى الصيغة العامة.

س٥) حوِّل المعادلات ذات الصيغة القياسية إلى معادلات بالصيغة العامة:

أ) $(س-٢)^٢ + (ص+٥)^٢ = ١٠$

ب) $(س+٣)^٢ + (ص-٤)^٢ = ٣٦$

ج) $(س-٥)^٢ + (ص-٧)^٢ = ٤٩$

الفصل الثالث

الأسس والجذور

(٣-١) الأسس

لقد درسنا – سابقاً– الأسس للأعداد الطبيعية والصحيحة وسنقوم بدراستها للأعداد الحقيقية.

تعريف: ليكن س ∋ ح / {٠} ، ن ∋ ص$^+$ فإن:

$$\text{س}^{\text{ن}} = \text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \ldots \times \text{س} \quad (\text{ن من المرات})$$

مثل $\text{س}^{٣} = \text{س} \times \text{س} \times \text{س}$

$\text{ص}^{٥} = \text{ص} \times \text{ص} \times \text{ص} \times \text{ص} \times \text{ص}$

وكذلك $٣^{٢} = ٣ \times ٣ = ٩$ ،

$(-٢)^{٤} = (-٢) \times (-٢) \times (-٢) \times (-٢) = ١٦$

خصائص (قواعد) الأسس:

لكل أ ، ب ∋ ح ، م ، ن ∋ **ص**$^+$ بحيث أن أ ≠ صفر، ب ≠ صفر فإن:

أولاً: $\text{أ}^{-\text{ن}} = \dfrac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$

امثلة:

$٣^{-٢} = \dfrac{١}{٣^{٢}} = \dfrac{١}{٩}$ ، $٥^{-١} = \dfrac{١}{٥}$ ، $(-٢)^{-٣} = \dfrac{١}{(-٢)^{٣}} = \dfrac{١}{-٨}$

ثانياً: $أ^{٠} = ١$

أمثلة: $٦^{٠} = ١$ ، $(-١٣)^{٠} = ١$ ، $(س + ص)^{٠} = ١$

وكذلك يمكن كتابة العدد (١) على شكل $س^{٠}$ أو $ص^{٠}$ أو $٣^{٠}$ أو $(-٥)^{٠}$ ... إلخ

ثالثاً:

أ) $(١)^{ن} = ١$ لكل $ن \in ص$

ب) $(-١)^{ن} = \begin{cases} ١ & \text{لكل ن عدد زوجي} \\ -١ & \text{لكل ن عدد فردي} \end{cases}$

أمثلة: $١^{٣} = ١$ ، $(١)^{-٥} = ١$ ، $(-١)^{٢} = ١$ ، $(-١)^{-٤} = ١$ ، $(-١)^{٧} = -١$ ، $(-١)^{-١} = -١$

رابعاً: $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م + ن}$ **[عند الضرب تجمع الأسس بشرط تساوي الأساسات]**

أمثلة:

أ) $س^{٢} \times س^{٣} = س^{٢+٣} = س^{٥}$

ب) $س^{-٤} \times س^{٢} = س^{-٤+٢} = س^{-٢} = \frac{١}{س^{٢}}$

حـ) $٢^{٣} \times ٢^{٢} = ٢^{٥} = ٣٢$

د) $٣^{-٤} \times ٣ = ٣^{-٤+١} = ٣^{-٣} = \frac{١}{٣^{٣}} = \frac{١}{٢٧}$

خامساً: $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م - ن}$ **[عند القسمة تطرح الأسس بشرط تساوي الأساسات]**

أمثلة:

أ) $س^{٧} \div س^{٤} = س^{٧-٤} = س^{٣}$

ب) $ص^{٤} \div ص^{-٣} = ص^{٤-(-٣)} = ص^{٤+٣} = ص^{٧}$

حـ) $٣^{٨} \div ٣^{٦} = ٣^{٨-٦} = ٣^{٢} = ٩$

د) $٧^{٢} \div ٧^{٢} = ٧^{٢-٢} = ٧^{٠} = ١$

سادساً: $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$ [عند الرفع تضرب الأسس]

أمثلة:

أ) $(س^{-٢})^{٣} = س^{-٢ \times ٣} = س^{-٦}$

ب) $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٢ \times ٣} = ٢^{٦} = ٦٤$

سابعاً: $(أ \,.\, ب)^{ن} = أ^{ن} \,.\, ب^{ن}$ ، $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$ **[الأس يتوزع على الضرب والقسمة]**

أمثلة:

أ) $(٢س)^{٤} = ٢^{٤}\ س^{٤} = ١٦\ س^{٤}$

ب) $(٣ص^{٢})^{٢} = ٣^{٢}\ ص^{٢ \times ٢} = ٩\ ص^{٤}$

جـ) $\left(\frac{٥}{س}\right)^{٢} = \frac{٥^{٢}}{س^{٢}} = \frac{٢٥}{س^{٢}} = ٢٥\ س^{-٢}$

د) $\left(\frac{س^{٢}}{ص^{٣}}\right)^{٣} = \frac{س^{٢ \times ٣}}{ص^{٣ \times ٣}} = \frac{س^{٦}}{ص^{٩}} = س^{٦}\ ص^{-٩}$

ملاحظة: **الأس لا يتوزع على الجمع والطرح**

لأن $(س \pm ص)^{٢} = س^{٢} \pm ٢\ س\ ص + ص^{٢}$ **[مربع كامل]**

$\therefore (س \pm ص)^{٢} \neq س^{٢} + ص^{٢}$

ثامناً: إذا كانت $أ^{ن} = أ^{م}$ فإن $ن = م$

أي: في الكميات الأسية المتساوية، إذا تساوت الأساسات تتساوى الأسس.

أمثلة:

أ) إذا كان $٢^{س} = ٢^{ص}$ فإن س= ص

ب) إذا كان $٣^{٥} = ٣^{س}$ فإن س= ٥

حـ) إذا كان $٢^{س} = ٨$ فما قيمة س؟

الحل: $٢^{س} = ٢^{٣}$

$\therefore$ س = ٣

تاسعاً:

إذا كان $أ^{ن} = ب^{ن}$ ، ن $\neq$ ٠ فإن:

أ) أ = ب إذا كان ن عدد فردي

ب) أ = $\pm$ ب إذا كان ن عدد زوجي

أمثلة:

أ) إذا كان $س^{٣} = ٥^{٣}$ فإن س=٥ لأن ٣ عدد فردي

ب) إذا كان $ص^{٤} = ٢^{٤}$ فإن ص = $\pm$ ٢ لأن ٤ عدد زوجي

حـ) إذا كان $س^{٥} = ٣٢$ فما قيمة س؟

الحل: $س^{٥} = ٢^{٥} \Leftarrow$ س= ٢

د) إذا كان $س^{٢} = \frac{١}{٦٤}$ فما قيمة س؟

الحل: $س^{٢} = \left(\frac{١}{٨}\right)^{٢} \Leftarrow س = \pm \frac{١}{٨}$

ويمكن تبسيط المقادير الجبرية باستخدام هذه القواعد مع أساسيات الرياضيات الأخرى كما في الأمثلة الآتية:

مثال (١): بسِّط ما يأتي إلى أبسط صورة:

١) $\text{أ}^{-٣}\,\text{ص}^{٤} \times \text{أ}^{٢}\,\text{ص}^{-٢}$

٢) $\dfrac{٥\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{-٢}}{٣^{-٢}\,\text{س}^{٣}}$

الحل:

١) $\text{أ}^{-٣}\,\text{ص}^{٤} \times \text{أ}^{٢}\,\text{ص}^{-٢} = \text{أ}^{-٣+٢}\,\text{ص}^{٤+(-٢)} = \text{أ}^{-١}\,\text{ص}^{٢} = \dfrac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}}$

٢) $\dfrac{٥\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{-٢}}{٣^{-٢}\,\text{س}^{٣}} = ٣^{٢} \times ٥\,\text{س}^{٢-٣}\,\text{ص}^{-٢} = ٩ \times ٥\,\text{س}^{-١}\,\text{ص}^{-٢} = \dfrac{٤٥}{\text{س}\,\text{ص}^{٢}}$

مثال (٢): اختصر المقدار الآتى: $\dfrac{٥^{\text{ن}} + ٥^{\text{ن}-١}}{٥^{\text{ن}+١} - ٥^{\text{ن}-١}}$

الحل: $\dfrac{٥^{\text{ن}} + ٥^{\text{ن}-١}}{٥^{\text{ن}+١} + ٥^{\text{ن}-١}}$

$$= \frac{٥^{\text{ن}} + ٥^{\text{ن}} \times ٥^{-١}}{٥^{\text{ن}} \times ٥ - ٥^{\text{ن}} \times ٥^{-١}} = \frac{\cancel{٥^{\text{ن}}}\,(١ + ٥^{-١})}{\cancel{٥^{\text{ن}}}\,(٥ - ٥^{-١})}$$

$$= \frac{١ + \frac{١}{٥}}{٥ - \frac{١}{٥}} = \frac{\frac{٦}{٥}}{\frac{٢٤}{٥}} = \frac{\cancelto{١}{٦}}{\cancelto{١}{٥}} \times \frac{\cancelto{١}{٥}}{\cancelto{٤}{٢٤}} = \frac{١}{٤}$$

مثال (٣): ضع ما يأتي في أبسط صورة:

$$\frac{٣\text{س}^{-٢}\,\text{ص}^{٢}}{(\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٣})^{-٢}} \div \frac{(٣\text{س}\,\text{ص})^{٢}}{٤(\text{س}\,\text{ص})^{-١}}$$

الحل:

$$\frac{٣\text{س}^{-٢}\,\text{ص}^{٢}}{(\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٣})^{-٢}} \div \frac{(٣\text{س}\,\text{ص})^{٢}}{٤(\text{س}\,\text{ص})^{-١}} = \frac{٣\text{س}^{-٢}\,\text{ص}^{٢}}{\text{س}^{-٤}\,\text{ص}^{-٦}} \div \frac{٣^{٢}\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}}{٤\,\text{س}^{-١}\,\text{ص}^{-١}}$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1}\,س^{-2}\,ص^{2}}{س^{-4}\,ص^{-6}} \times \frac{4س^{-1}\,ص^{-1}}{\cancel{9}_{3}\,س^{2}\,ص^{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\;س^{-2+(-1)-(-4)-2}\;ص^{2+(-1)-(-6)-2}$$

$$= \frac{4}{3}\;س^{-1}\;ص^{5} = \frac{4\;ص^{5}}{3\;س}$$

مثال(٤): أثبت أن: $\frac{ب}{س^{-1}} + \frac{س}{ب^{-1}} = 2\;ب\;س$

الحل:

الطرف الأيمن $= \frac{ب}{\frac{1}{س}} + \frac{س}{\frac{1}{ب}} = ب\;س + س\;ب$

$= 2ب\;س$ الطرف الأيسر

طريقة ثانية:

الطرف الأيمن $=$ ب س + س ب **[رفعنا $س^{-1}$، $ب^{-1}$ إلى البسط]**

$= 2$ ب س $=$ الطرف الأيسر

مثال (٥) حل المعادلة الآتية: $(2س + 1)^{3} = 27$

الحل: $(2س + 1)^{3} = 3^{3}$

$\therefore\; 2س + 1 = 3$ **[لأن الأسس فردية ومتساوية]**

$2س = 3 - 1$

$2س = 2$

$\therefore\; س = 1$

(٣-٢) الجذور:

سبق وأن درست الجذور التربيعية والتكعيبية وهنا سندرس خصائص الجذور بصورة عامة.

فإذا كان أ ، ب $\in$ ح$^{+}$ حيث ب $\neq$ ٠ ، ن $\in$ ص بحيث ن $>$ ١ فإن:

أولاً: $\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}^{\text{م}}} = \text{ب}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \left(\text{ب}^{\frac{١}{\text{ن}}}\right)^{\text{م}}$

مثال (١):

أ) $\sqrt{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt{\text{ص}} = \text{ص}^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{\text{هـ}} = \text{هـ}^{\frac{١}{٣}}$

ب) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٤}} = \text{س}^{\frac{٤}{٥}} = \left(\text{س}^{\frac{١}{٥}}\right)^{٤}$

حـ) $\sqrt{٤^{٣}} = ٤^{\frac{٣}{٢}} = \left(٢^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} = ٢^{٢\times\frac{٣}{٢}} = ٢^{٣} = ٨$

ملاحظة: $\sqrt[\text{ن}]{١^{\text{م}}} = ١$ لكل ن $\in$ ص$^{+}$، م $\in$ ص

أمثلة: $\sqrt[٢]{(١)^{٣}} = ١^{\frac{٣}{٢}} = ١$

$\sqrt[٤]{(١)^{-٣}} = ١^{\frac{-٣}{٤}} = ١$

ثانياً: ١) $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ} . \text{ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} . \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$ **[الجذر يتوزع على الضرب]**

وعكس الخاصية صحيح

٢) $\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}}$ **[الجذر يتوزع على القسمة]**

وعكس الخاصية صحيح

ملاحظة: الجذر لا يتوزع على الجمع والطرح، فمثلاً:

$\sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

بينما $\sqrt{١٦} + \sqrt{٩} = ٤ + ٣ = ٧$

أي أن $\sqrt{١٦ + ٩} \neq \sqrt{١٦} + \sqrt{٩}$

[أثبت حالة الطرح بمثال]

مثال (٢):

أ) $\sqrt{٤\text{س}^{٢}} = \sqrt{٤} \times \sqrt{\text{س}^{٢}} = ٢\text{س}$

ب) $\sqrt[٣]{٢٧\text{ص}^{٦}} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{\text{ص}^{٦}} = ٣\ \text{ص}^{٢}$

حـ) $\sqrt[٥]{\dfrac{\text{س}^{١٠}}{٣٢}} = \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}^{١٠}}}{\sqrt[٥]{٢^{٥}}} = \dfrac{\text{س}^{\frac{١٠}{٥}}}{٢^{\frac{٥}{٥}}} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢}$

د) $\sqrt[٣]{٠{,}٠٦٤} = \sqrt[٣]{\dfrac{٦٤}{١٠٠٠}} = \dfrac{\sqrt[٣]{٦٤}}{\sqrt[٣]{١٠٠٠}} = \dfrac{\sqrt[٣]{٤^{٣}}}{\sqrt[٣]{١٠^{٣}}} = \dfrac{٤}{١٠} = ٠{,}٤$

ملاحظة:

أولاً: إذا كان أ = $\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$ فإن:

١) أ ∈ ح لكل ن عدد زوجي موجب إذا كان ب عدد حقيقي غير سالب.

٢) أ ∈ ح لكل ن عدد فردي موجب.

ثانياً:

$\sqrt[\text{ن}]{-\text{أ}} = -\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ لكل ن عدد صحيح فردي موجب

مثال (٣): بسّط كل مما يأتي إلى أبسط صورة:

١) $\sqrt[٣]{٨} = ٨^{\frac{١}{٣}} = (٢^{٣})^{\frac{١}{٣}} = ٢^{\cancel{٣} \times \frac{١}{\cancel{٣}}} = ٢$

٢) $\sqrt[٣]{-٦٤} = -\sqrt[٣]{٦٤} = -(٦٤)^{\frac{١}{٣}} = -(٤^{٣})^{\frac{١}{٣}} = -٤^{\cancel{٣} \times \frac{١}{\cancel{٣}}} = -٤$

٣) $\sqrt[٣]{٧} = ٧^{\frac{١}{٣}}$

٤) $\sqrt[٣]{(٣٤٣)^{٢}} = (٣٤٣)^{\frac{٢}{٣}} = (٧^{٣})^{\frac{٢}{٣}} = ٧^{\cancel{٣}\times\frac{٢}{\cancel{٣}}} = ٧^{٢} = ٤٩$

٥) $(٢٤٣)^{\frac{-٢}{٥}} = (٣^{٥})^{\frac{-٢}{٥}} = ٣^{\cancel{٥}\times\frac{-٢}{\cancel{٥}}} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٩}$

٦) $(٦٢٥)^{\frac{٣}{٤}} = (٥^{٤})^{\frac{٣}{٤}} = ٥^{\cancel{٤}\times\frac{٣}{\cancel{٤}}} = ٥^{٣} = ١٢٥$

٧) $\sqrt{س^{٣}} \times \sqrt{س^{-١}} \times \sqrt[٦]{س^{٥}} = س^{\frac{٣}{٢}} \times س^{\frac{-١}{٢}} \times س^{\frac{٥}{٦}} = س^{\frac{٣}{٢}+\frac{-١}{٢}+\frac{٥}{٦}} = س^{\frac{٩-٣+٥}{٦}} = س^{\frac{١١}{٦}}$

٨) $\sqrt[٣]{٥٤} = \sqrt[٣]{٢٧\times٢} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{٢} = ٣\sqrt[٣]{٢} = ٣ \times ٢^{\frac{١}{٣}}$

٩) $\cancel{٣}ص^{\frac{-٣}{٢}} \times ٤ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{٣}{\cancel{٣}}ص^{\frac{-٢}{٣}} = ٤ \times ٣ص^{-\frac{٣}{٢}+\frac{١}{٢}-\frac{٢}{٣}} = ١٢ص^{\frac{-٩+٣-٤}{٦}} = ١٢ص^{\frac{\cancel{-١٠}\,-٥}{\cancel{٦}\,٣}}$

$= ١٢ص^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{١٢}{ص^{\frac{٥}{٣}}} = \frac{١٢}{\sqrt[٣]{ص^{٥}}}$

١٠) $\sqrt[٥]{-٠,٠٠٠٠٣٢} = -\sqrt[٥]{٠,٠٠٠٠٣٢} = -\sqrt[٥]{\frac{٣٢}{١٠٠٠٠٠٠}} = -\frac{\sqrt[٥]{٣٢}}{\sqrt[٥]{١٠٠٠٠٠٠}} = -\frac{٢}{١٠} = -٠,٢$

١١) $\sqrt[٦]{٨ب^{٣}حـ^{٥}} \times \sqrt[٦]{٨ب^{٩} \times ٢حـ^{-١١}} = \sqrt[٦]{٢\times٨\times٨ب^{٣+٩}حـ^{٥-١١}} = \sqrt[٦]{١٢٨ب^{١٢}حـ^{-٦}}$

$= ٢^{\frac{٧}{٦}}ب^{\frac{١٢}{٦}}حـ^{\frac{-٦}{٦}} = ٢^{\frac{٧}{٦}}ب^{٢}حـ^{-١}$

$= \frac{٢^{\frac{٧}{٦}}ب^{٢}}{حـ}$

١٢) $\sqrt[٣]{\sqrt{٧٢٩}} = \sqrt[٣]{\sqrt{٣^{٦}}} = \sqrt{٣^{\frac{٦}{٣}}} = \sqrt{٣^{٢}} = ٣^{\frac{٢}{٢}} = ٣$

١٣) جد قيمة س إذا كان: $(س+٢)^{\frac{-٣}{٥}} = \frac{١}{\sqrt[٥]{٢٧}}$

الحل:

$(س+٢)^{\frac{-٣}{٥}} = \frac{١}{\sqrt[٥]{٣^{٣}}}$

$(س+٢)^{\frac{-٣}{٥}} = \frac{١}{٣^{\frac{٣}{٥}}}$

$(س+٢)^{\frac{-٣}{٥}} = ٣^{\frac{-٣}{٥}}$ [إذا تساوت الأسس الفردية تتساوى الأساسات]

$\therefore س+٢ = ٣$

$س = ٣ - ٢ = ١$

تمارين (٣-١)

١) جد ناتج ما يأتي:

أ) $\left(\sqrt[٤]{٢٧}\right)^{\frac{-٤}{٣}}$ ب) $\left(\frac{٢٧}{٦٤}\right)^{\frac{-٢}{٣}}$ حـ) $\frac{٤^{\text{ن}+١} \times ٦^{١-٢\text{ن}}}{٩^{١-\text{ن}}}$

د) $\left(\sqrt[٣]{٨١}\right)^{\frac{٣}{٤}}$

٢) اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة:

أ) $\frac{٣^{\text{ن}+٢} + ٣^{\text{ن}+١}}{٣^{\text{ن}} - ٣^{\text{ن}-١}}$ ب) $\sqrt[٥]{\text{أ}^{-٣}\,\text{ب}^{-٢}} \times \sqrt[٨]{\text{أ}^{-٣}\,\text{ب}^{-٤}} \times \left(\text{أ}^{-٤}\,\text{ب}^{-٦}\right)^{\frac{-٢}{٥}}$

حـ) $\frac{٦^{-٢} \times ٢^{٣} \times ١٨^{٢}}{٣^{-٢} \times ٣٦^{-١}}$ د) $\frac{٨١^{\frac{٣}{٤}} \times (٢٤)^{\frac{-١}{٢}} \times ٢}{٦^{\frac{١}{٢}} \times ٨^{\frac{-٣}{٢}}}$

هـ) $\frac{\text{أ}^{\frac{٣}{٥}}\,\text{ب}^{\frac{١}{٢}}\,\text{حـ}^{\frac{٣}{٤}} \times \left(\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٣}\,\text{حـ}^{-١}\right)^{\frac{-١}{٢}}}{\left(\text{أ}^{٣}\,\text{ب}^{-٥}\,\text{حـ}^{\frac{-٥}{٤}}\right)^{\frac{١}{٥}}}$ و) $\sqrt[٣]{٠,١٢٥} \times \sqrt[٣]{٠,٠٠١}$

٣) حل كلاً من المعادلات الآتية:

أ) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}} = \frac{١}{٢٧}$

ب) $\left(\sqrt[٥]{٢٤٣}\right)^{٢} = \left(\text{س}^{\frac{-١}{٢}}\right)^{٢}$

حـ) $(\text{س} + ٢)^{\frac{-١}{٢}} = ٣$

الفصل الرابع

المتتاليات (المتتابعات)

(٤-١) مقدمة

لو رتبنا مجموعة من الأعداد على النحو الآتي:

٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ٣٧، ٥٠، ٦٥، ٨٢، ....

إذا واصلنا ترتيب الأعداد وفق هذا النمط. ما العدد الذي يلي العدد (٨٢)؟

ستلاحظ أن كل حد من حدود المتتالية يعتمد على القاعدة $ن^{٢}+١$ حيث أن $ن \in ص$

ولو أخذنا الأعداد ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠،... فهذا الترتيب من الأعداد يسمى **متتالية** ، ويسمى كل عدد من هذه الأعداد **حداً** في المتتالية. ويمكن أن نرمز لحدود المتتالية بالرموز $ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$، $ح_{٤}$،...

فالحد الأول: $ح_{١}=٢$، الحد الثاني: $ح_{٢}=٤$، الحد الثالث: $ح_{٣}=٦$ وهكذا يمكن أن نرمز للحد الذي ترتيبه ن بالرمز $ح_{ن}$ والذي يعرف بـ(**الحد العام**) أو (**الحد النوني**) للمتتالية.

وإذا أمكن التوصل إلى قاعدة الحد العام للمتتالية بدلالة مرتبة الحد (ن) فيمكن تحديد قيمة أي حد في المتتالية إذا علم ترتيبه.

نذكّر هنا إن الرمز ن يدل على مرتبة (تسلسل) الحد في المتتالية. ويأخذ القيم ١، ٢، ٣، ٤، ... [مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة] أي $ن \in ص^{+}$

فلو عملنا الجدول الآتي للمتتالية أعلاه:

ن	١	٢	٣	٤	٥			٨	
$ح_{ن}$	٢	٤	٦	٨	١٠			١٦	

نلاحظ أن قيمة أي حد تساوي ضعف مرتبته (تسلسله) أي أن الحد العام يمكن كتابته بالقاعدة الآتية:

$ح_{ن}= ٢ ن$

فيمكنك إتمام الجدول أعلاه باستخدام قانون الحد العام.

ملاحظة: إن قاعدة الحد العام للمتتالية تربط كل حد من حدود المتتالية بمرتبة (تسلسل) ذلك الحد.
ويتضح ذلك من الجدول السابق. فيتم التوصل لقاعدة الحد العام بملاحظة كيفية ارتباط كل حد في المتتالية بمرتبته.

(٢-٤) تعريف المتتالية:

هي دالّة مجالها (ص⁺) أو أي مجموعة جزئية منها مرتبة تبدأ بالعدد (١)، ومجالها المقابل مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية. حيث مدى الدالة يمثل حدود المتتالية أو (المتتابعة)

تكون المتتالية **منتهية** إذا كان مجالها المجموعة {١، ٢، ٣، ...،ن} ⊆ ص

وتكون المتتالية **غير منتهية** إذا كان مجالها ص

مثال١: إذا كانت م: ص⁺ ← ح بحيث م(ن) = ٣ن فيمكن أن نعبّر عن الدالة م بمجموعة من الأزواج المرتبة: م= {(١، ٣)، (٢، ٦)، (٣، ٩)، (٤، ١٢)،...}

ملاحظة: طالما أن مجال أي متتالية هو المجموعة **ص⁺** = {١، ٢، ٣، ٤،...،ن،...}، فيمكننا أن نذكر عناصر المجال المقابل فقط والتي تمثل حدود المتتالية، ونحصرها بين القوسين < > وتفصل بين العناصر فارزة (،).

وعليه فإن المتتالية في المثال١ يمكن أن نعبّر عنها بالصيغة:

< مـن > = < ٣ن > = < ٣، ٦، ٩، ١٢، ...، ٣ن،... >

حيث يسمى الحد ٣ ن **بالحد العام** أو **الحد النوني**.

مثال٢: اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليتين:

أ) < حن > = < ن٢ – ٢ن > ب) < حن > = < ١/ن + ١ >.

الحل: أ) < حن > = < ن٢ – ٢ن >

ح١ = ١٢ – ٢× ١ = ١–٢ =–١

ح٢ = ٢٢ – ٢× ٢ = ٤ –٤ = ٠

ح٣ = ٣٢ – ٢× ٣ = ٩ –٦ =٣

ح٤ = ٤٢ – ٢ × ٤ = ١٦– ٨ =٨

ح٥ = ٥٢ – ٢ × ٥ = ٢٥ –١٠ =١٥

∴ الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي < –١، ٠، ٣، ٨، ١٥ >

ب) $\langle ح_ن \rangle = \langle \frac{١}{ن} + ١ \rangle$

$ح_١ = \frac{١}{١} + ١ = ١ + ١ = ٢$

$ح_٢ = \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٢}$

$ح_٣ = \frac{١}{٣} + ١ = \frac{٤}{٣}$

$ح_٤ = \frac{١}{٤} + ١ = \frac{٥}{٤}$

$ح_٥ = \frac{١}{٥} + ١ = \frac{٦}{٥}$

∴ الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي $\langle ٢،\ \frac{٣}{٢}،\ \frac{٤}{٣}،\ \frac{٥}{٤}،\ \frac{٦}{٥} \rangle$

مثال٣: اكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية $\langle ح_ن \rangle = \langle \frac{ن}{٢ن - ١} \rangle$

الحل: $\langle ح_ن \rangle = \langle \frac{ن}{٢ن - ١} \rangle$

$ح_١ = \frac{١}{٢ \times ١ - ١} = \frac{١}{٢ - ١} = \frac{١}{١} = ١$

$ح_٢ = \frac{٢}{٢ \times ٢ - ١} = \frac{٢}{٤ - ١} = \frac{٢}{٣}$

$ح_٣ = \frac{٣}{٢ \times ٣ - ١} = \frac{٣}{٦ - ١} = \frac{٣}{٥}$

$ح_٤ = \frac{٤}{٢ \times ٤ - ١} = \frac{٤}{٨ - ١} = \frac{٤}{٧}$

$ح_٥ = \frac{٥}{٢ \times ٥ - ١} = \frac{٥}{١٠ - ١} = \frac{٥}{٩}$

$ح_٦ = \frac{٦}{٢ \times ٦ - ١} = \frac{٦}{١٢ - ١} = \frac{٦}{١١}$

∴ الحدود الستة الأولى هي $\langle ١،\ \frac{٢}{٣}،\ \frac{٣}{٥}،\ \frac{٤}{٧}،\ \frac{٥}{٩}،\ \frac{٦}{١١} \rangle$

مثال (٤): جد الحد العام ثم الحد العاشر للمتتالية: < ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥،.... >

الحل: لاحظ كيف يرتبط كل حد بمرتبته وفق الجدول الآتي:

ن	١	٢	٣	٤	٥				
$ح_ن$	١	٤	٩	١٦	٢٥				

إن كل قيمة من قيم ن ترتبط مع مربعها أي أن ن يرتبط مع $ن^٢$

وعليه فإن الحد العام لهذه المتتالية: $\langle ح_ن \rangle = \langle ن^٢ \rangle$

$\therefore ح_{١٠} = ١٠^٢ = ١٠٠$

(٤-٣) المتتالية العددية (الحسابية):

تسمى المتتالية < $ح_ن$ > متتالية عددية إذا كان:

$$ح_{ن+١} - ح_ن = \textbf{عدد ثابت} \qquad \text{لكل } ن \in ص^+$$

أي أن أي حد من حدود المتتالية يزيد عن الحد الذي يسبقه بمقدار ثابت يسمى **أساس المتتالية العددية** وسنرمز له بالرمز (**د**)، كما سنرمز للحد الأول من المتتالية العددية بالرمز (**أ**).

ويمكن كتابة العلاقة أعلاه بالصورة:

$$\boxed{د = ح_{ن+١} - ح_ن}$$

أي أن: $د = ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = \dots$

فلو تفحصنا المتتالية: < −٤ ، −١ ، ٢، ٥، ٨، ١١، ... > نلاحظ أن كل حد يزيد عن سابقه بمقدار (٣) لذا فهي متتالية عددية أساسها (٣).

ملاحظة: إذا عُلم الحد الأول من المتتالية العددية وأساسها فيمكن إيجاد بقية حدودها وذلك بإضافة الأساس لأي حد لنحصل على الحد الذي يليه.

أي أن: $ح_{ن+١} = ح_ن + د$

وعليه فإن المتتالية العددية بصورة عامة هي:

< $ح_١$ ، $ح_١ + د$ ، $ح_٢ + د$ ، $ح_٣ + د$ ، $ح_٤ + د$ ، ... ، $ح_{ن-١} + د$ ، ... >

مثال: اكتب المتتالية العددية: < ١٧، ٢٣، .... >

الحل: ∵ المتتالية عددية فإن:

$د = ح_٢ - ح_١ = ٢٣ - ١٧ = ٦$

∴ $ح_٣ = ح_٢ + د = ٢٣ + ٦ = ٢٩$

$ح_٤ = ح_٣ + د = ٢٩ + ٦ = ٣٥$

$ح_٥ = ح_٤ + د = ٣٥ + ٦ = ٤١$

$ح_٦ = ح_٥ + د = ٤١ + ٦ = ٤٧$

∴ المتتالية هي < ١٧، ٢٣، ٢٩، ٣٥، ٤١، ٤٧، .... >

(٤-٤) الحد العام للمتتالية العددية:

إذا رمزنا للحد الأول من المتتالية بالرمز $ح_{١}$ وللحد الثاني $ح_{٢}$ وهكذا فإن الحد النوني (العام) هو $ح_{ن}$.

ومن الملاحظة السابقة فإن هذه الحدود هي:

$ح_{١} = أ$

$ح_{٢} = ح_{١} + د = أ + د = أ\ (٢-١)\ د$

$ح_{٣} = ح_{٢} + د = أ + د + د = أ + ٢د = أ + (٣-١)\ د$

$ح_{٤} = ح_{٣} + د = أ + ٢د + د = أ + ٣د = أ + (٤-١)\ د$

$\vdots$

$ح_{ن} = ح_{ن-١} + د = أ + (ن-٢)\ د + د = أ + (ن-١)\ د$

أي أن:

$$\boxed{ح_{ن} = أ + (ن - ١)\ د}$$

يسمى $ح_{ن}$ الحد العام (النوني) للمتتالية العددية والذي يمثل قاعدة عامة يمكن منها إيجاد كل حدود المتتالية العددية.

مثال ١: إذا كان الحد الأول من متتالية عددية هو (١٧) وأساسها هو (−٥) فجد حديها الخامس والثامن؟

الحل: $\because$ المتتالية عددية

$\therefore ح_{ن} = أ + (ن-١)\ د$

$ح_{٥} = أ + (٥-١)\ د$

$= أ + ٤\ د = ١٧ + ٤ \times (-٥) = ١٧ - ٢٠ = -٣$

$ح_{٨} = أ + (٨-١)\ د$

$= أ + ٧\ د = ١٧ + ٧ \times (-٥) = ١٧ - ٣٥ = -١٨$

مثال٢: جد الحد الخامس عشر من المتتالية : < −١١ ، −٧ ، −٣ ، ١ ، ٥ ، ...>

الحل: يجب أن نبين أولاً نوع هذه المتتالية

$ح_{٢}$ − $ح_{١}$ = −٧ − (−١١) = −٧ + ١١ = ٤

$ح_{٣}$ − $ح_{٢}$ = −٣ − (−٧) = −٣ + ٧ = ٤

$ح_{٤}$ − $ح_{٣}$ = ١ − (−٣) = ١ + ٣ = ٤

$ح_{٥}$ − $ح_{٤}$ = ٥ − ١ =٤

∴ المتتالية عددية وأساسها = ٤ وعليه فإن:

$ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) د

$ح_{١٥}$ = أ + ١٤ د = −١١ + ١٤ × ٤

= −١١ + ٥٦ = ٤٥

مثال٣ : متتالية عددية حدها الثالث = ٧ وحدها السابع= −٥ فما حدها الثالث عشر؟

الحل: بتطبيق قانون الحد العام للمتتالية العددية فإن:

$ح_{٣}$ = أ + ٢ د

٧ = أ + ٢ د ..... (١)

$ح_{٧}$ = أ + ٦ د

−٥ = أ + ٦ د ..... (٢)

وتمثل (١) و(٢) معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى.

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة رقم (١) نحصل على:

− ٤ د = ١٢ ⟸ د = −٣

وبالتعويض عن قيمة (د) في المعادلة رقم (١):

أ + ٢ × (−٣) = ٧

أ − ٦ = ٧ ⟸ أ = ٧ + ٦ = ١٣

$ح_{ن}$= أ + (ن −١) د

$ح_{١٣}$ = أ + ١٢ د = ١٣ + ١٢ × (−٣)

= ١٣ − ٣٦ = −٢٣

ملاحظة: يمكن حل هاتين المعادلتين الآنيتين (نظام خطي) بطريقة كرايمر التي درستها في الفصل الأول (جرّب ذلك).

مثال ٤: يراد لف خيط على بكرة، فإذا كانت اللفة الأولى تستهلك من الخيط طولاً قدره ١,٥ سم، واللفة الثانية تستهلك طولاً قدره ١,٨ سم، واللفة الثالثة تستهلك طولاً قدره ٢,١ سم، وهكذا فما طول الخيط المستهلك في اللفة العاشرة؟ وإذا علمت أن طول الخيط المستهلك في إحدى اللفات كان ٦ سم، فما ترتيب تلك اللفة؟

الحل: من الواضح أن أطوال الخيط في اللفات يمثل المتتالية العددية:

<١,٥ ، ١,٨ ، ٢,١ ، .... > حيث:

أ = ١,٥ ، د= $ح_{٢}$ − $ح_{١}$ = ١,٨ − ١,٥ = ٠,٣

$ح_{ن}$ = أ + (ن −١) د

$ح_{١٠}$ = أ + ٩ د = ١,٥ + ٩ × ٠,٣ = ١,٥ + ٢,٧

= ٤,٢ سم طول الخيط المستهلك في اللفة العاشرة

ولمعرفة ترتيب اللفة التي تستهلك ٦ سم من الخيط نطبق قانون الحد العام حيث ن يمثل ترتيب اللفة و $ح_{ن}$ يمثل طول الخيط المستهلك (٦ سم).

٦ = ١,٥ + (ن −١) × ٠,٣

٦ = ١,٥ + ٠,٣ ن − ٠,٣

٠,٣ ن = ٦ − ١,٥ + ٠,٣

٠,٣ ن = ٤,٨ $\Leftarrow$ ن = $\frac{٤,٨}{٠,٣}$ = ١٦

∴ اللفة التي تستهلك من الخيط طولاً قدره ٦ سم هي اللفة السادسة عشرة.

مثال٥: حددت إدارة مصنع سياستها بأن يبدأ العامل الجديد بإنتاج (٣٤) قطعة في اليوم الأول لعمله ثم عليه أن يزيد إنتاجه (٣) قطع في كل يوم عما أنتجه في اليوم السابق حتى يصل إلى هدف الإنتاج اليومي المحدد وهو (١٠٠) قطعة. بعد كم يوم يصل العامل الجديد إلى هذا الهدف المحدد؟

الحل: من الواضح أن عدد القطع التي ينتجها العامل يومياً يمثل متتالية عددية حدها الأول= ٣٤ وأساسها = ٣ ومن الواضح أن عدد الأيام يمثل ترتيب الحدود. أي أن المطلوب إيجاد ترتيب الحد الذي قيمته ١٠٠.

فبتطبيق قانون الحد العام للمتتالية العددية نحصل على:

حن = أ + (ن − ١) د

١٠٠ = ٣٤ + (ن −١) × ٣

١٠٠ = ٣٤ + ٣ ن − ٣

٣ ن = ١٠٠ − ٣٤ + ٣

٣ن = ٦٩ ⟸ ن = $\frac{٦٩}{٣}$ =٢٣

∴ بعد ٢٣ يوم يصل العامل الجديد إلى هدف الإنتاج المحدد.

(٤-٥) مجموع حدود المتتالية العددية:

إذا رمزنا للحد الأخير من المتتالية العددية بالرمز **ل**، ورمزنا لمجموع حدود المتتالية بالرمز مجن فإن:

مجن = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل]

حيث ن يمثل عدد حدود المتتالية

تستخدم هذه الصيغة إذا علم الحد الأول والحد الأخير وعدد حدود المتتالية العددية. أما إذا لم يعرف الحد الأخير، فمن المعلوم أن ل = حن (الحد النوني)

وأن حن = أ + (ن −١) د فيمكن أن نعوض عن ل بـحن في القانون أعلاه لنحصل على:

مجن = $\frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن−١) د]

∴ **مجن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن−١) د]**

وتستخدم هذه الصيغة إذا علم الحد الأول والأساس وعدد الحدود.

مثال ١: جد مجموع حدود المتتالية التي حدها الأول = −٧ وحدها الأخير = ٣٣ وعدد حدودها =٩.

الحل: $مج_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$= \frac{٩}{٢} \times (−٧ + ٣٣) = \frac{٩}{\cancel{٢}} \times \overset{١٣}{\cancel{٢٦}} = ١١٧$

مثال٢: جد مجموع اثني عشر حداً من المتتالية العددية: < ٣٠ ، ٢٧، ٢٤، ....>

الحل: د= $ح_٢ - ح_١$ = ٢٧ −٣٠ = −٣

$مج_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن−١) د]$

$مج_{١٢} = \frac{١٢}{٢} [٢ \times ٣٠ + ١١ \times (−٣)]$

$= ٦ \times (٦٠ −٣٣) = ٦ \times ٢٧ = ١٦٢$

مثال٣ : صممت ساعة لكي توضع في أحد الميادين العامة بحيث تدق عدداً من الدقات يساوي العدد الذي يشير إليه عقرب الساعات تماماً. جد عدد الدقات التي تدقها الساعة خلال ١٢ ساعة.

الحل: إن عدد الدقات التي تدقها الساعة عند كل ساعة يشكل المتتالية العددية < ١، ٢، ٣، ٤،...،١٢>

حيث: أ = ١ ، ل = ١٢ ، ن = ١٢

$مج_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$مج_{١٢} = \frac{١٢}{٢} [١ + ١٢] = ٦ \times ١٣ = ٧٨$ دقة

مثال ٤: رتبت قاعة بـ(٣٢) صف من المقاعد، فإذا كان في الصف الأول (١٥) مقعداً، ويزيد كل صف عن الصف الذي أمامه بمقدار مقعدين فما عدد المقاعد في القاعة؟

الحل: إن عدد المقاعد لكل صف في هذه القاعة يمثل متتالية عددية: < ١٥، ١٧، ١٩، .... > فيها:

عدد المقاعد في الصف الأول (أ) = ١٥ ، عدد الصفوف (ن) = ٣٢

مقدار الزيادة في كل صف (د) = $ح_٢ - ح_١$ = ١٧ − ١٥ = ٢ ،

$مج = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن−١) د] =$

$= \frac{٣٢}{٢} [٢ \times ١٥ + ٣١ \times ٢]$

$= ١٦ \times (٣٠ +٦٢) = ١٦ \times ٩٢ = ١٤٧٢$ مقعداً عدد المقاعد

مثال ٥ : إذا كان مجموع ن من حدود المتتالية العددية < −٤ ، ١، ٦، ... > يساوي ١٠٨، فما قيمة ن؟

الحل: د = $\text{ح}_{٣}$ − $\text{ح}_{٢}$ = ٦ − ١ = ٥

$\text{مج}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} [\, ٢\text{ أ} + (\text{ن}-١)\text{ د} \,]$

$١٠٨ = \frac{\text{ن}}{٢} [\, ٢ \times (-٤) + (\text{ن}-١) \times ٥ \,]$ (بضرب المعادلة × ٢)

$٢١٦ = \text{ن} [\, -٨ + ٥\text{ن} - ٥ \,]$

$٢١٦ = \text{ن} (٥\text{ن} - ١٣)$

$٢١٦ = ٥\text{ن}^{٢} - ١٣\text{ن}$

$٥\text{ن}^{٢} - ١٣\text{ن} - ٢١٦ = ٠$

$(٥\text{ن} + ٢٧)(\text{ن} - ٨) = ٠$

أما $٥\text{ن} + ٢٧ = ٠ \Leftarrow ٥\text{ن} = -٢٧ \Leftarrow \text{ن} = \frac{-٢٧}{٥} \notin \text{ص}^{+}$ (يهمل)

او $\text{ن} - ٨ =$ صفر $\Leftarrow \text{ن} = ٨$

∴ عدد الحدود = ٨

تمارين (٤-١)

١) اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات الآتية:

أ- <حن> = < ٣ن + ن^{٢} >

ب- <حن> = < −١ + (−١)^{ن} >

حـ - <حن> = < ٣ن + $\frac{١}{ن}$ >

٢) إذا كانت < −٣ ، س ، ١١، ... > متتالية عددية، فجد قيمة س.

٣) جد الحد السابع عشر من المتتالية < ٣ ، ٧ ، ١١ ، ... >

٤) جد عدد حدود المتتالية العددية < −٢٩ ، −٢٦ ، ... ، ٤٣ >

٥) ما هي مرتبة الحد الذي قيمته (٤٣) في المتتالية العددية < ٧٥ ، ٧١ ، ...>؟

٦) متتالية عددية حدها الحادي عشر (−٨) وحدها التاسع والعشرون (٤)، فما هي المتتالية؟

٧) ما مجموع الأعداد الطبيعية من ١١ إلى ٣٠ ؟

٨) كم حداً يؤخذ من المتتالية < ٢١ ، ١٧ ، ١٣، ... > ابتداءًا من الحد الأول ليكون مجموعها (−١٢).

٩) جد مجموع (١٦) حداً من حدود المتتالية < −٤ ، ٠ ، ٤ ، ... >

١٠) جد مجموع المتتالية < ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ... ، ٩٦ >

١١) رتبت مقاعد قاعة في (٣٠) صفاً بحيث وضع في الصف الأول (٣٢) مقعداً ووضع في الصف الثاني (٣٥) مقعداً، وفي الصف الثالث (٣٨) مقعداً، ... وهكذا. جد عدد المقاعد في الصف الأخير.

١٢) شركة لحفر الآبار تتقاضى (١٠) دولار عن حفر المتر الأول و(١٢) دولار عن حفر المتر الثاني و(١٤) دولار عن حفر المتر الثالث، ... وهكذا. فكم تبلغ كلفة حفر المتر رقم (١٠٠) في البئر؟

١٣) تزداد كلفة صيانة إحدى الآلات بمقدار ثابت يساوي (٢٥) دولار في كل سنة، فإذا كانت تكلفة صيانة هذه الآلة في السنة الأولى هي (٣٥) دولار فجد:

أ- تكلفة صيانة الآلة في نهاية السنة العاشرة.

ب- مجموع تكاليف صيانة الآلة في أول عشر سنوات.

١٤) يراد بناء ملعب لكرة القدم محاط بمدرج لجلوس الجماهير، بحيث تصطف المقاعد في صفوف دائرية حول الملعب، فإذا صمم المدرج بحيث يحتوي (٥٠) صفاً من المقاعد. يكون في الصف الأول (٢٥٠) مقعداً ثم يزداد عدد المقاعد بمقدار (٤٠) مقعداً في كل صف لاحق عن الصف الذي يسبقه. فكم تبلغ سعة هذا الملعب من المقاعد؟

(٤-٦) المتتالية الهندسية:

إذا تأملت المتتالية: < ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ... > يمكنك أن تلاحظ أن $ح_٢$ = ٢$ح_١$ وأن $ح_٣$ = ٢$ح_٢$،

وأن $ح_٤$ = ٢$ح_٣$... وهكذا أي أن:

$\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = ٢$ **(مقدار ثابت) ويمكن القول أن:**

نسبة كل حد إلى الحد السابق له تساوي مقدار ثابت.

إن مثل هذه المتتالية تسمى **(متتالية هندسية)**، وتسمى النسبة الثابتة بين كل حد والحد السابق له **(أساس المتتالية الهندسية)**.

فالمتتالية الهندسية: هي متتالية تكون فيها نسبة كل حد إلى الحد السابق له مقدار ثابت ويسمى هذا المقدار الثابت أساس المتتالية ويرمز له بالرمز(ر).

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ر$ **لكل** ن $\in$ $ص^+$

ومن هذه العلاقة يمكن الاستنتاج:

$ح_{ن+١} = ح_ن \times ر$ أي للحصول على أي حد من حدود المتتالية نضرب الحد السابق له بأساس المتتالية.

مثال: اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية الهندسية التي حدها الأول= ٢ وأساسها =٣.

الحل: كما أسلفنا فإنه للحصول على أي حد نضرب الحد السابق له بأساس المتتالية وعليه فإن:

$ح_١$ = ٢

$ح_٢$ = $ح_١$ × ر = ٢ × ٣ = ٦

$ح_٣$ = $ح_٢$ × ر = ٦ × ٣ = ١٨

$ح_٤$ = $ح_٣$ × ر = ١٨ × ٣ = ٥٤

$ح_٥$ = $ح_٤$ × ر = ٥٤ × ٣ = ١٦٢

$ح_٦$ = $ح_٥$ × ر = ١٦٢ × ٣ = ٤٨٦

∴ الحدود الستة الأولى هي: < ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ١٦٢، ٤٨٦ >

(٤-٧) الحد العام للمتتالية الهندسية:

إذا رمزنا للحد الأول من المتتالية الهندسية بالرمز $ح_١$ وللحد الثاني بالرمز $ح_٢$ وللثالث $ح_٣$. وهكذا فإن الحد النوني أو الحد العام هو $ح_ن$. ويمكن كتابة حدود المتتالية كالآتي:

$ح_١ = أ$

$ح_٢ = ح_١ × ر = أ × ر = أ ر^{(٢-١)}$

$ح_٣ = ح_٢ × ر = أ ر × ر = أ ر^٢ = أ ر^{(٣-١)}$

$ح_٤ = ح_٣ × ر = أ ر^٢ × ر = أ ر^٣ = أ ر^{(٤-١)}$

$ح_٥ = ح_٤ × ر = أ ر^٣ × ر = أ ر^٤ = أ ر^{(٥-١)}$

وبصورة عامة فإن:

$$\boxed{ح_ن = أ ر^{ن-١}}$$

وتسمى هذه القاعدة **بقانون الحد العام (النوني)** للمتتالية الهندسية والذي بواسطته يمكن إيجاد أي حد من حدود المتتالية.

مثال١: جد الحد الخامس من المتتالية الهندسية التي حدها الأول=٥ وأساسها= −٣

الحل: $ح_ن = أ ر^{ن-١}$

$ح_٥ = أ ر^٤ = ٥ × (-٣)^٤ = ٥ × ٨١ = ٤٠٥$

مثال٢: اكتب الحد السابع من متتالية هندسية حدها الأول= $\frac{-١}{٤}$ وأساسها= $\frac{١}{٢}$

الحل: $ح_ن = أ ر^{ن-١}$

$ح_٧ = أ ر^٦ = \frac{-١}{٤} × (\frac{١}{٢})^٦ = \frac{-١}{٤} × \frac{١^٦}{٢^٦} = \frac{-١}{٤} × \frac{١}{٦٤} = \frac{-١}{٢٥٦}$

مثال٣: جد أساس المتتالية الهندسية التي حدها الأول=٨ وحدها الخامس =٢٠٤٨

الحل:

$ح_ن = أ ر^{ن-١}$

$ح_٥ = أ ر^٤$

$٢٠٤٨ = ٨ ر^٤ \Leftarrow ر^٤ = \frac{٢٠٤٨}{٨}$

$ر^٤ = ٢٥٦ \Leftarrow ر^٤ = ٤^٤$

$\therefore ر = \pm ٤$

مثال ٤: جد عدد حدود المتتالية < ١، ٣، ٩، ...، ٢٤٣>

الحل: من الواضح أن هذه المتتالية هندسية لأن:

$$\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٣}{١} = ٣ \text{ ، } \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

$أ = ١ \text{ ، } ر = ٣$

$ح_ن = أ \, ر^{ن-١}$

$٢٤٣ = ١ \times ٣^{(ن-١)}$

بتحليل العدد ٢٤٣ يتبين أنه = $٣^٥$ أي أن:

$٣^٥ = ٣^{ن-١} \Leftarrow ن-١ = ٥$ **[إذا تساوت الاساسات تتساوى الاسس]**

$\therefore ن = ٥ + ١ = ٦$

مثال٥: إذا كان الحد الثاني من متتالية هندسية = −١٨ وحدها الخامس = −١٤٤ فما هي المتتالية؟

الحل: $ح_ن = أ \, ر^{ن-١}$

$ح_٢ = أ \, ر$

$-١٨ = أ \, ر$ .... (١)

$ح_٥ = أ \, ر^٤$

$-١٤٤ = أ \, ر^٤$ .... (٢)

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١) نحصل على

$$\frac{\cancel{أ} \, ر^٤}{\cancel{أ} \, ر} = \frac{-١٤٤}{-١٨} \Leftarrow ر^٣ = ٨ \Leftarrow ر^٣ = ٢^٣ \Leftarrow ر = ٢$$

نعوض عن قيمة ر في المعادلة (١) لنحصل على

$$أ \times ٢ = -١٨ \Leftarrow أ = \frac{-١٨}{٢} = -٩$$

$\therefore$ المتتالية هي: < −٩، −١٨، −٣٦، −٧٢، ... >

مثال٦: وجد عبد الله انه إذا سقطت كرة مطاطية رأسياً إلى أسفل من ارتفاع مقداره (ع) متر فإنها ترتد عن سطح أرضية افقية إلى ارتفاع ($\frac{٤}{٥}$ع) متر. فإذا سقطت الكرة من ارتفاع (١٠) أمتار، فما الارتفاع الذي ترتد إليه بعد ارتطامها بالأرض للمرة الرابعة؟

الحل: إن ارتفاعات الكرة عن سطح الأرض تشكل المتتالية:

$<$ع، $\frac{٤}{٥}$ ع، $\frac{٤}{٥}$ ع، $(\frac{٤}{٥})$ع)،...... $>$ ومن الواضح أنها متتالية هندسية

أساسها = $\frac{٤}{٥}$

فإذا كان حدها الأول أ = ١٠

ولأن الكرة بعد ارتطامها للمرة الرابعة سيكون الارتفاع هو الحد الخامس

$ح_{ن} = أ\ ر^{ن-١}$

$\therefore ح_{٥} = أ\ ر^{٤}$

$= ١٠ \times (\frac{٤}{٥})^{٤}$

$= ١٠ \times \frac{٤^{٤}}{٥^{٤}} = ١٠ \times \frac{٢٥٦}{٦٢٥} = \frac{٢٥٦٠}{٦٢٥} =$ ٤,٠٩٦ متر ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بعد الارتطام للمرة الرابعة.

تمارين (٤-٢)

١) إذا كانت < ٢٥٦، ص، ١ > متتالية هندسية فما قيمة ص؟

٢) اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتاليات الهندسية:

أ) أ = ٤٩، ر= $\frac{١}{٧}$

ب) أ = $\frac{-١}{٢٥٦}$ ، ر=-٤

٣) جد الحد السابع من المتتالية: < ٣، ٢، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٨}{٩}$ ، ...>

٤) متتالية هندسية حدها الثالث= -٤، وحدها السادس= -٣٢ فما حدها الأول؟ وما أساسها؟

٥) جد أساس المتتالية الهندسية الآتية ثم جد حدها السابع:

< -٥٤، -١٨، -٦، -٢، ... >

٦) جد الحد السادس من المتتالية الهندسية < ٣، $\frac{٩}{٢}$ ، ...>

٧) تبيع إحدى الشركات جهاز الحاسوب في السنة الأولى من تاريخ صنعه بمبلغ (١٠٠٠ دولار) وتبيعه في السنة الثانية من تاريخ صنعه بمبلغ (٨٠٠ دولار) وتبيعه في السنة الثالثة من تاريخ صنعه بمبلغ (٦٤٠ دولار). فإذا استمر انخفاض سعر جهاز الحاسوب وفق هذا النمط. فكم يبلغ سعر هذا الجهاز في السنة السابعة من تاريخ صنعه؟

٨) ما تسلسل الحد الذي قيمته ١٢٨ في المتتالية الهندسية: < ٤، ٨، ١٦، ...، ١٢٨ >.

الفصل الخامس
الإحصاء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿لِّيَعْلَمَ أَن قَدْ أَبْلَغُوا رِسَالَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا﴾

[الجن: ٢٨]

مقاييس النزعة المركزية:

عند ملاحظة بيانات معينة نرى بأن لها نزعة او ميلاً لأن تتركز (تتجمع) حول قيمة معينة متوسطة، وهذه القيم التي تتركز حولها البيانات تسمى بالمتوسطات او مقاييس النزعة المركزية ومنها المتوسط (الوسط الحسابي) الذي يمثل معدل قيم معينة، وكذلك الوسيط الذي يتوسط قيم معينة، والمنوال الذي يمثل أكثر القيم شيوعاً (تكراراً).

(٥-١)الوسط الحسابي:

تعلمنا في السنين الماضية كيفية احتساب الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات غير المبوبة وهو عبارة عن معدل مجموع القيم ، ويرمز له بالرمز ($\overline{س}$) ويحسب كالآتي:

$$\text{الوسط الحسابي } (\overline{س}) = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

مثال ١: إذا كانت أعمار سبعة أشخاص هي: (٤سنوات ، ٨سنوات ، ٩سنوات ، ١١سنة ، ٢٢سنة ، ١٤سنة ، ١٦سنة) فما هو الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص؟

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي } (\overline{س}) = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{٤ + ٨ + ٩ + ١١ + ٢٢ + ١٤ + ١٦}{٧}$$

$$= \frac{٨٤}{٧} = ١٢ \text{ سنة}$$

أما في حالة البيانات المبوبة بجدول تكراري، فإن الوسط الحسابي يحسب باستخدام القانون:

$$\text{الوسط الحسابي } (\overline{\text{س}}) = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج (ك)}}$$

حيث تمثل س القيمة في حالة الجداول التكرارية البسيطة، ك تكرار تلك القيمة.

وتمثل س مركز الفئة في حالة الجداول التكرارية ذات الفئات، ك تكرار تلك الفئة

مثال٢: البيانات الآتية تمثل رواتب (٣٠) موظفاً في مؤسسةٍ ما. فما متوسط راتب الموظف فيها:

الراتب (بالآلاف)	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠	المجموع
التكرار	٢	٢	٥	٦	١٠	٥	٣٠

الحل: نلاحظ أن البيانات مرتبة في جدول تكراري بسيط. لذا لإيجاد الوسط الحسابي فإننا نضرب كل راتب (س) في تكراره (ك) ، ثم نجد مجموع حواصل الضرب. فيصبح الجدول كالآتي:

الراتب (بالآلاف)	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠	المجموع
التكرار	٢	٢	٥	٦	١٠	٥	٣٠
س × ك	٢٠٠	٣٠٠	١٠٠٠	١٥٠٠	٣٠٠٠	١٧٥٠	٧٧٥٠

نحسب الوسط الحسابي باستخدام القانون الآتي:

$$\text{الوسط الحسابي } (\overline{\text{س}}) = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج (ك)}}$$

$$= \frac{٧٧٥٠}{٣٠}$$

∴ $\overline{\text{س}}$ = ٢٥٨,٣ ألف دينار متوسط رواتب الموظفين في تلك المؤسسة

مثال٣: جد الوسط الحسابي للبيانات الواردة في الجدول التكراري الآتي:

الفئات	٤ –	٦ –	٨–	١٠ –	١٢ –	١٤ –	المجموع
التكرار	١٤	١٠	١٥	٩	٦	٨	٧٢

الحل: نلاحظ أن البيانات مرتبة حسب الفئات، لذا فلإيجاد الوسط الحسابي يجب أن نحسب مركز كل فئة والذي نحصل عليه باستخدام العلاقة الآتية:

$$\text{مركز الفئة (س)} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة}}{٢}$$

$$\text{فمثلاً مركز الفئة الأولى} = \frac{٤ + ٦}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$$

$$\text{وكذلك مركز الفئة الثانية} = \frac{٦ + ٨}{٢} = \frac{١٤}{٢} = ٧$$

وهكذا لبقية الفئات. ثم نضرب مركز كل فئة في تكرارها فنحصل على الحقل (س×ك) وبهذا يصبح الجدول كالآتي:

الفئات	٤ –	٦ –	٨–	١٠ –	١٢ –	١٤ – ١٦	المجموع
التكرار (ك)	١٤	١٠	١٥	٩	٦	٨	٦٢
مركز الفئة (س)	٥	٧	٩	١١	١٣	١٥	
س × ك	٧٠	٧٠	١٣٥	٩٩	٧٨	١٢٠	٥٧٢

$$\text{الوسط الحسابي } (\overline{\text{س}}) = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج (ك)}}$$

$$= \frac{٥٧٢}{٦٢}$$

$$\cong ٩{,}٢٢$$

(٥-٢) الوسيط:

وهو عبارة عن القيمة التي تتوسط مجموعة قيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً. فإذا كان **عدد البيانات فردياً** فإن تسلسل الوسيط نجده باستخدام القانون:

$$\text{تسلسل الوسيط} = \frac{\text{ن}+١}{٢} \qquad \text{حيث ن عدد البيانات}$$

وإذا كان **عدد البيانات زوجياً** فإن الوسيط هو معدل القيمة التي ترتيبها $\frac{\text{ن}}{٢}$ مع القيمة التي تليها.

ملاحظة: عند ترتيب القيم (تصاعدياً أو تنازلياً) يراعى أن تكتب كل القيم المكررة إن وجد تكرار فيها.

مثال ١: جد الوسيط للأعداد: (٥٢ ، ٥٨ ، ٦٣ ، ٥٠ ، ٥٥)

الحل: نرتب هذه القيم ترتيباً تصاعدياً فتكون: (٥٠ ، ٥٢ ، ٥٥ ، ٥٨ ، ٦٣)

∵ عدد البيانات = ٥ (فردي)

$$\text{تسلسل الوسيط} = \frac{\text{ن} + ١}{٢} = \frac{٥+١}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

∴ تسلسل الوسيط = ٣

∴ الوسيط لهذه البيانات = (٥٥)

مثال ٢: جد الوسيط للقيم: (٢٧ ، ١٢ ، ٥ ، ٨ ، ٤٥ ، ٣١ ، ٢٠ ، ٢٥)

الحل: نرتب هذه القيم ترتيباً تنازلياً فتكون: (٤٥ ، ٣١ ، ٢٧ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٢ ، ٨ ، ٥)

∵ عدد البيانات = ٨ (زوجي) لذا فإن الوسيط هو معدل القيمة التي ترتيبها

$$\frac{\text{ن}}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤ \quad \text{والقيمة التي تليها} \quad \text{[أي معدل القيمتين الرابعة والخامسة]}$$

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{٢٥+٢٠}{٢} = \frac{٤٥}{٢} = ٢٢{,}٥$$

مثال ٣: جد الوسيط للقيم (٢، ٥، ١، ٥، ٧، ٧، ٣)

الحل: نرتب البيانات تصاعدياً فتكون:

(١، ٢، ٣، ٥، ٥، ٧، ٧)

∵ عدد البيانات فردي = ٧

∴تسلسل الوسيط= $\frac{ن+١}{٢} = \frac{٧+١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

∴ الوسيط = ٥

(٥-٣) المنوال:

أولاً: المنوال للبيانات غير المبوبة:

وهو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً). وقد يوجد للقيم أكثر من منوال. وقد لا يكون للقيم منوال.

مثال١: ما المنوال للقيم (٤ ، ٧ ، ٦ ، ٤ ، ٨ ، ٥)؟

الحل: المنوال لهذه البيانات هو (٤).

مثال٢: القيم (٥٠ ، ٣٥ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٥) ليس لها منوال.

ثانياً: المنوال للبيانات المبوبة:

هو القيمة التي تقابل أكبر تكرار وذلك للجداول التكرارية البسيطة، أما للجداول التكرارية المبوبة حسب الفئات فإن المنوال هو مركز الفئة التي تقابل أكبر تكرار.

مثال٣: جد المنوال للبيانات الآتية:

القيم	٢٠٠	٢٢٥	٢٥٠	٢٧٥	٣٠٠	٣٢٥	٣٥٠	٣٧٥
تكرارها	١٠	١٢	١٥	٢٠	١٢	١١	٧	٥

∵ أكبر تكرار لهذه القيم هو (٢٠) والذي يقابل القيمة ٢٧٥،

∴ المنوال لهذه البيانات = ٢٧٥

مثال٤: جد المنوال للبيانات المبينة في الجدول التكراري الآتي:

الفئات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –٩٠
التكرار	٧	٤٠	٢٥	١٥	٥٠	٧٠	١٢	١٨

الحل:

نلاحظ أن أكبر تكرار هو (٧٠) ويقابل الفئة (٦٠ – ٧٠) والتي مركزها (٦٥).

∴ المنوال = ٦٥

تمارين (٥-١)

١) جد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للقيم الآتية: (٥ ، ١٢ ، ١١ ، ١٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١٦ ، ١٥).

٢) جد الوسط الحسابي والمنوال من الجدول التكراري الآتي:

الفئات	١٠ –	١٢ –	١٤ –	١٦ –	١٨ –	٢٠ –	٢٢ – ٢٤
التكرار	٨	٦	٤	١٥	١٠	٧	٦

٣) جد الوسيط والوسط الحسابي للأعمار الآتية: (٤ ، ٨ ، ٩ ، ١١ ، ٢٢ ، ١٤ ، ١٦) سنة.

٤) جد الوسط الحسابي والمنوال للبيانات من الجدول الآتي:

الفئات (س)	١	٣	٥	٧	٩
التكرار (ك)	١٠	٢٠	٥	٢٥	٤٠

٥) الجدول الآتي يمثل توزيع درجات (٨٠) تلميذاً في امتحان ما. جد الوسط الحسابي والمنوال لها:

الدرجة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
الطلاب	١	٢	١	٥	١٧	٢١	٢٢	٤	٤	٢	١	٨٠

٦) احسب الوسط الحسابي والمنوال للبيانات المبينة في الجدول الآتي:

الفئات	١٢ –	٢٢ –	٣٢ –	٤٢ –	٥٢ –	٦٢–٧٢
التكرار	٣	٥	٨	٤	٢	١

٧) هل يوجد منوال للقيم الآتية (١٢ ، ١١ ، ١٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١٦ ، ١٥)؟ ولماذا؟ وما هو الوسط الحسابي والوسيط لها؟

٨) رتبت إدارة أحد المساجد البيانات الخاصة بالملتحقين بدورة تحفيظ القرآن الكريم للعطلة الصيفية البالغ عددهم (٦٠) مشارك؛ ضمن الفئات العمرية المبينة في الجدول التكراري الآتي، والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي والمنوال لأعمار المشاركين في تلك الدورة:

الفئات العمرية	٨ –	١٠ –	١٢ –	١٤ –	١٦ –	١٨ –	٢٠–٢٢
عدد المشاركين	١٠	٧	٥	١٥	١٠	٧	٦

الفهرست