المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد رسول الله وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد ...

فإن لجنة الرياضيات في دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية في ديوان الوقف السنّي في جمهورية العراق تهنئ طلبتنا الأعزاء بالعام الدراسي الجديد وتقدم لهم الطبعة السابعة من كتاب الرياضيات للصف الثالث. وهي إذ تشيد بجهود الأستاذين الفاضلين مؤلفَي الكتاب، فإنها يسعدها أن تقدم بتواضع بالغ بعض الإضافات التي ترى أنها ضرورية لإثراء الكتاب وإخراجه بشكل أفضل ممّا يساعد على حصول الفائدة المتوخاة منه والنهوض بالمستوى العلمي لطلبة المدارس الإسلامية. وقد تمثلت هذه الإضافات والتغييرات في تغيير شكل وحجم الطباعة وإدخال الألوان في إخراج الكتاب وكتابة القوانين والملاحظات بخط أكبر وأوضح وضمن إطار ملون. وإثراء فصول الكتاب جميعها بأمثلة محلولة، وأسئلة متنوعة.

وقد ضم الكتاب خمسة فصول، إذ اقتصر الفصل الأول على موضوع (التطبيق) بعد أن قمنا بحذف موضوع العلاقات منه وتنقيحه وكذلك تم تنقيح أمثلة وتمارين الفصل الثاني، وإعادة صياغة الفصل الثالث (الحدوديات والتحليل) مع حذف موضوع تحليل المقادير الجبرية ذوات الأربعة حدود ،أما الفصل الرابع (المتباينات والمعادلات) فقد قمنا بإعادة تنقيحه، وقد تم حذف فصل (الهندسة الإحداثية)، وجعل فصل (الإحصاء) هو الفصل الخامس بعد تنقيحه وإعادة صياغته.

وقد حرصنا على الاستمرار في نهجنا في تعريف طلبتنا الأعزاء بعلماء المسلمين القدماء الذين كان لهم الفضل في تطوير علم الرياضيات والهندسة، والذي شرعنا به منذ الصف الأول ، وسنتعرف في الصف الثالث على العالم الجليل (ثابت بن قرة).

ندعو الله أن ينتفع طلبتنا بما يتعلمون ويتقبل منّا ومنهم صالح الأعمال ويغفر لنا ولهم الزلل والخطأ ويكتبنا عنده في الصالحين المصلحين، ويهدينا بهديه لما يحبه ويرضاه ...

﴿إِنَّ رَبِّي قَرِيبٌ مُجِيبٌ﴾ هود: ٦١

لجنة الرياضيات

في

دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية

أهداف تدريس الكتاب

يهدف الكتاب إلى زيادة معلومات الطالب الرياضية من خلال تعلّمه موضوعات جديدة إضافية استكمالاً لما سبق دراسته، مثل:

١. دراسة موضوع التطبيق وبيان أنواعه.

٢. التعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية باعتبارها توسيع للمجاميع السابقة.

٣. تطوير مفهوم الجذور.

٤. دراسة طرق تحليل المقادير الجبرية، وبعض التطبيقات عليها.

٥. دراسة مفاهيم جديدة كالمتباينات والمعادلات وكيفية حلها.

٦. ترجمة بعض المسائل بالصورة اللفظية إلى الصورة الرياضية من أجل إيجاد حلول لها.

٧. دراسة تصنيف البيانات وجدولتها وطريقة حساب بعض مقاييس النزعة المركزية لها.

دور علماء المسلمين في الرياضيات

ثابت بن قرة

(٢٢١-٢٨٨هـ/ ٨٣٦-٩٠١م)

عالم عربي اشتهر بعمله في الفلك والرياضيات والهندسة والموسيقى. ولد في مدينة **حران** الواقعة جنوب شرق **تركيا** عند منبع نهر البليخ أحد روافد نهر الفرات فيها . هو أول من توصل لحساب طول السنة الشمسية حيث حددها بـ(٣٦٥) يوماً و٦ ساعات و٩ دقائق و١٢ ثانية (أي أنه أخطأ بثانيتين فقط).

مؤلفاته في الرياضيات:

له كتاب في الأعداد المتحابّة، وكتاب في قطع الأسطوانة، وكتاب في أعمال ومسائل إذا وقع خط مستقيم على خطين، وكتاب في المثلث القائم الزاوية، وكتاب في الشكل القطاع، وكتاب في التصرف في أشكال القياس، وكتاب في مقدمات إقليدس، وكتاب في أشكال إقليدس، وكتاب في أشكال المجسطي ، وكتاب في استخراج المسائل الهندسية، ورسالة الحجة المنسوبة إلى سقراط، ومقالة في عمل شكل مجس ذي أربع عشرة قاعدة تحيط به كرة معلومة، وكتاب المدخل إلى كتاب إقليدس، وكتاب المدخل إلى المنطق، وكتاب في المربع وقطره، وكتاب في مساحة الأشكال المسطحة وسائر البسط والأشكال، وجوامع كتاب نيقوماخس في الأرثماطيقي مقالتان، وأشكال له في الحيل، وجوابه عن مسائل سأله عنها أبو سهل النوبختي، وكتاب في قطع المخروط المكافئ، وكتاب في مساحة الأجسام المكافئة، وكتاب في أشكال الخطوط التي يمر عليها ظل المقياس، ومقالة في الهندسة ، وجوامع كتاب الأعضاء الآلمة لجاليونس، وكتاب في النسبة المؤلفة، رسالة في العدد الوفق، كتاب في مساحة قطع الخطوط، وكتاب في آلة الزمر بالسرياني ، ومقالة في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية، وإصلاحه للمقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في قطع النسب المحدودة، ومختصر في علم الهندسة.

وفاته: توفي في العراق سنة ثمان وثمانين ومئتين، وله من العمر سبع وسبعون سنة.

الفصل الأول

التطبيق

درسنا في الصف الثاني العلاقات ومنها العلاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى فإذا كانت س، ص مجموعتين فان أية مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي **س** × **ص** يمثل علاقة من المجموعة **س** إلى المجموعة **ص** ويرمز لها بالرمز ع : **س** ← **ص** وأن (أ، ب) ∈ ع

يعني أ ∈ **س** ، **ب** ∈ **ص**

(١-١) التطبيق

تسمى العلاقة ع المعرّفة من المجموعة س إلى المجموعة ص **تطبيقاً** إذا ارتبط كل عنصر في المجموعة س بعنصر وحيد في المجموعة ص. ويكتب بالشكل ع : س ← ص ، وتسمى المجموعة س بـ (**مجال التطبيق**)، وتسمى المجموعة ص بـ(**المجال المقابل**).

ملاحظة١:

إذا كان ع : س ← ص وارتبط العنصر هـ ∈ س بالعنصر ل ∈ ص بموجب التطبيق ع ، فيقال للعنصر ل بأنه صورة العنصر هـ تحت تأثير التطبيق ع . ونعبر عن هذا رياضياً بالشكل:

ع (هـ) = ل   أو   هـ ← ل

مدى التطبيق:

هو مجموعة صور عناصر المجال تحت تأثير التطبيق. ويكون مجموعة جزئية من المجال المقابل.

قاعدة الاقتران:

هي العلاقة (القاعدة) التي يرتبط بموجبها العنصر في المجال بصورته في المجال المقابل.

وعليه يمكن القول بأن التطبيق هو قاعدة اقتران بحيث يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر وحيد في المجال المقابل. ويمكن التعبير عن قاعدة الاقتران رياضياً بالآتي:

س ← س + ١   أو   **ع** (س) = س + ١ ،

س ← س^{٢} − ١   أو   **ق** (س) = س^{٢} − ١ ،

س ← ٢س − ٣   أو   **ت** (س) = ٢س − ٣ ،

س ← ٢س^{٢} + س − ٣   أو   **هـ** (س) = ٢س^{٢} + س − ٣

ملاحظة ٢:

بما أن التطبيق هو علاقة من مجموعة إلى أخرى، فيكتب بشكل مجموعة أزواج مرتبة تمثل ارتباطات كل عنصر في المجال مع صورته في المجال المقابل. أي إذا كان **ت** : **س**⟵ **ص** تطبيقاً فيمكن كتابته بالشكل:

ت = { (س١ ، **ت**(س١)) ، (س٢ ، **ت**(س٢)) ، (س٣ ، **ت**(س٣)) ، ...}

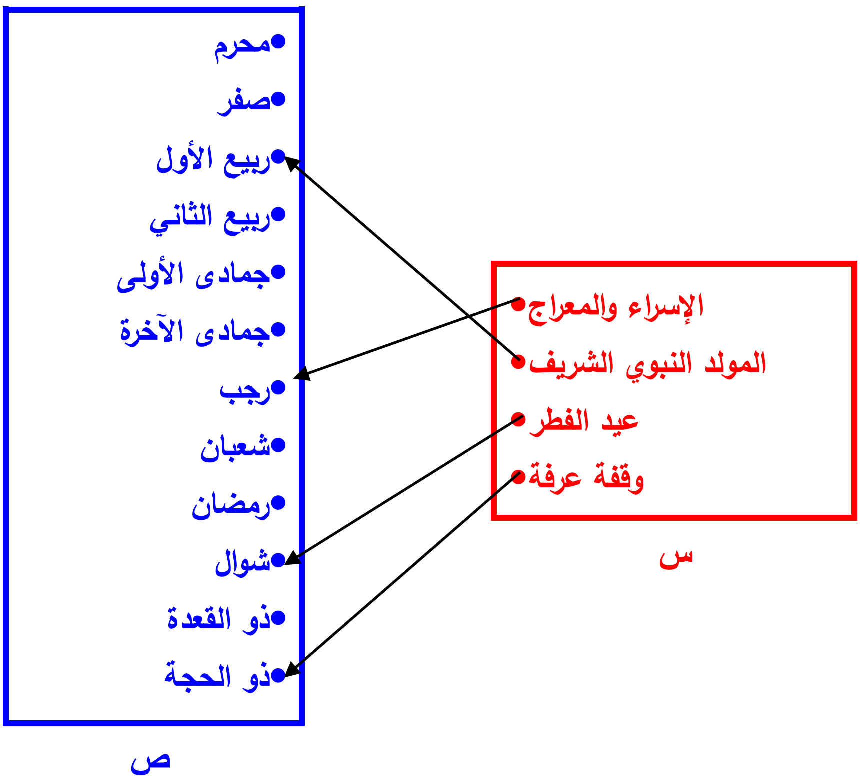
مثال١: إذا كانت س={ الإسراء والمعراج ، المولد النبوي الشريف ، عيد الفطر ، وقفة عرفة }، ص = مجموعة الأشهر الهجرية . فإذا كانت ع علاقة (مناسبة في) ، اكتب هذه العلاقة من س إلى ص على شكل أزواج مرتبة، مع تمثيلها بمخطط سهمي، ثم بيّن هل هي تطبيق أو لا ولماذا؟

الحل: **س**={الإسراء والمعراج ، المولد النبوي الشريف ، عيد الفطر ، وقفة عرفة }

ص={ محرم ، صفر ، ربيع الأول، ربيع الثاني ، جمادى الأولى ، جمادى الآخرة ، رجب ، شعبان ، رمضان ، شوال ، ذي القعدة ، ذي الحجة }

ع = {(الإسراء والمعراج، رجب) ،(المولد النبوي الشريف ، ربيع الأول) ، (عيد الفطر ، شوال) ، (وقفة عرفة ، ذي الحجة) }

العلاقة ع تعتبر تطبيقاً لأن كل عنصر في **س** ارتبط مع عنصر وحيد في **ص**.



مثال٢ : إذا كانت س={١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ }، ص={٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }،وكانت س ← س+٤ علاقة اكتب هذه العلاقة من س إلى ص على شكل أزواج مرتبة، مع تمثيلها بمخطط سهمي، ثم بيّن هل هي تطبيق ولماذا؟ وإذا كانت تطبيقاً فجد المجال والمجال المقابل والمدى.

الحل: نطبق قاعدة الاقتران والتي تعني (اجمع مع ٤) :

س← س + ٤

١← ١ + ٤ = ٥

٢← ٢ + ٤ = ٦

٣← ٣ + ٤ = ٧

٥ ← ٥ + ٤ = ٩

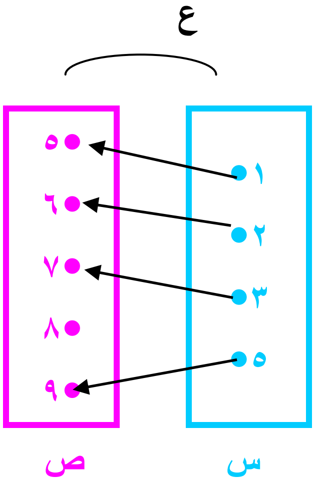
ع = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٧) ، (٥ ، ٩) }

العلاقة ع تعتبر تطبيقاً لأن كل عنصر في س ارتبط مع عنصر وحيد في ص.

المجال = س

المجال المقابل = ص

المدى = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ }



مثال٣ : إذا كان ل : س ← ط تطبيقاً (ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية) ، وأن س= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}، وقاعدة الاقتران هي س ← س+ ٥ ، اكتب مدى التطبيق.

الحل: نطبق القاعدة التي تتمثل بجمع كل عدد في س مع ٥:

س← س + ٥

١← ١ + ٥ = ٦

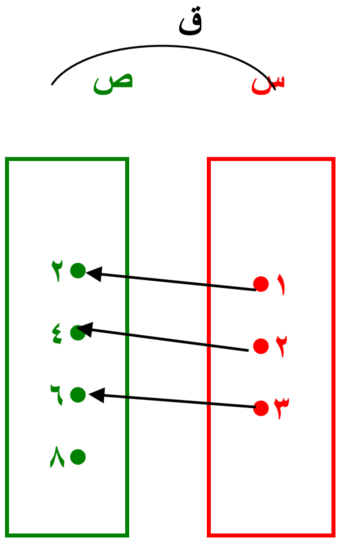
٢← ٢ + ٥ = ٧

٣← ٣ + ٥ = ٨

٤← ٤ + ٥ = ٩

∴ مدى التطبيق = {٦ ، ٧، ٨ ، ٩ }

مثال٤ : إذا كان ق : س ← ص تطبيقاً حيث إن س={١ ، ٢ ، ٣ }، ص={٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } وقاعدة الاقتران هي ق(س) = ٢س (أي اضرب في ٢). ارسم المخطط السهمي للتطبيق وحدّد المدى؟



الحل: نطبق القاعدة التي تتمثل بضرب كل عدد بالمجموعة **س** في ٢:

ق(س) = ٢س

ق(١) = ٢ × ١ = ٢

ق(٢) = ٢ × ٢ = ٤

ق(٣) = ٢ × ٣ = ٦

∴المدى = {٢ ، ٤ ، ٦ }

مثال٥ : إذا كان ت : س←ط تطبيقاً ، وقاعدة الاقتران هي ت(س) = ٣س - ١ (أي اضرب في ٣ ثم اطرح ١). اكتب مدى التطبيق إذا كان س={١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ثم مثّلها بمخطط سهمي.

الحل: نضرب كل عدد في **س** في٣ ثم نطرح منه واحداً، أي نطبق القاعدة:

ت(س) = ٣س - ١

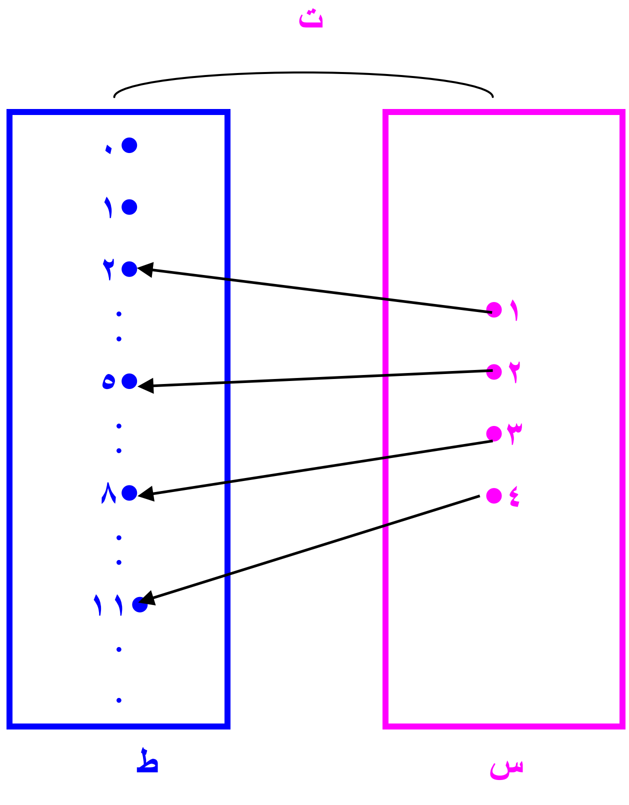
ت(١) =٣ × ١- ١ = ٢

ت(٢) =٣ × ٢- ١ = ٥

ت(٣) =٣ × ٣-١ = ٨

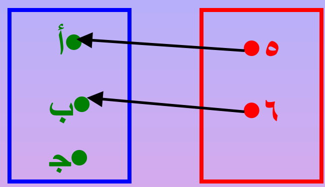
ت(٤) =٣ × ٤ -١ = ١١

∴مدى التطبيق = {٢، ٥ ، ٨ ، ١١ }

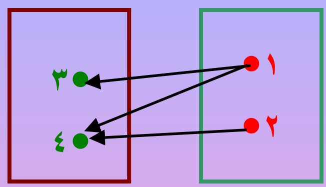


تمارين (١ - ١)

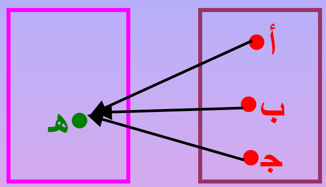
١) أي من العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً، وأي منها لا يمثل تطبيقاً؟ ولماذا؟



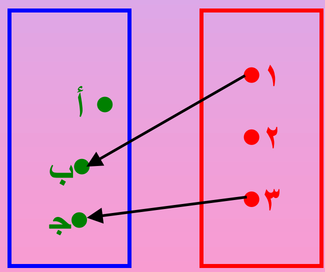
أ



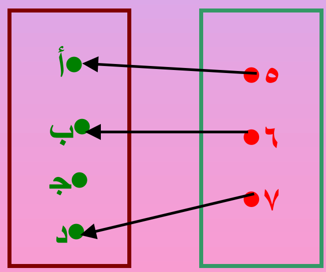
ب



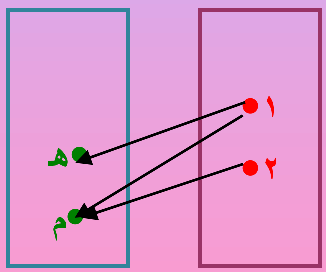
جـ



د



هـ



و

٢) إذا كانت س= {١، ٢، ٣، ٥ }، ص= {١، ٥، ٧، ٨ }، ع علاقة من س إلى ص حيث:
ع = { (١، ١)، (٢، ٥)، (٣، ٧)، (٥، ٧)} ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة، ثم بيِّن هل هي تطبيق؟ ولماذا؟ ثم جد المدى.

٣) إذا كان ت : س ← ط تطبيقاً ، حيث إن س={-١، ٧، ٩ ، ١١ ، ١٣} وإن س ← ٢س+ ٣.
ارسم المخطط السهمي لهذا التطبيق ثم حدّد مجاله ومجاله المقابل ومداه.

٤) إذا كانت س = {٠ ، -١ ، ١ ، -٢ ، ٢ } وأن التطبيق ق : س ← ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) بحيث ق(س) = س^{٢}. جد:

١) ق(٠) ٢) ق(-١) ٣) ق(١) ٤) ق(-٢) ٥) ق(٢)

ثم جد المدى ومثّله بمخطط سهمي.

٥) إذا كان ت: س ← ط تطبيقاً حيث س ← ٢س^{٢}- ١ ، س= {١، ٢، ٥ ، ٧}، ط : مجموعة الأعداد الطبيعية . جد مدى التطبيق.

(١–٢) أنواع التطبيق

١. التطبيق الشامل:

يقال لتطبيقٍ ما أنه **شامل** إذا كان كل عنصر من عناصر مجاله المقابل هو صورة وحيدة لعنصر في الأقل في مجاله. وبعبارة أخرى يقال للتطبيق إنه شامل إذا كان: **المدى = المجال المقابل**

مثال١ : لتكن س= مجموعة الصلوات الخمس، ص= { ٢، ٣ ، ٤} ، وكان ت : س← ص تطبيقاً بحيث ت(س) = عدد الركعات. هل إن التطبيق شاملاً أم لا ؟ ولماذا ؟

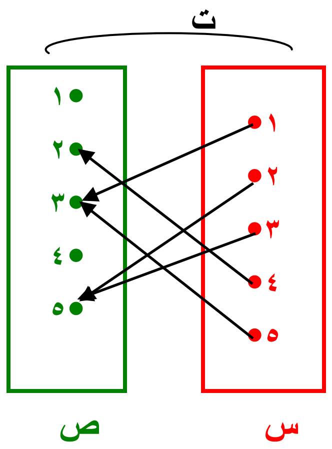
الحل : س= {الفجر، الظهر ، العصر ، المغرب ، العشاء}

ت = {(الفجر،٢)، (الظهر، ٤) ، (العصر، ٤) ، (المغرب، ٣) ، (العشاء، ٤) }

مدى التطبيق = {٢، ٣ ، ٤}= ص (المجال المقابل)

∴ التطبيق ت شامل لأن المدى = المجال المقابل

مثال٢ : لتكن س= {١،٢، ٣ ، ٤ ، ٥ }، ص= { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ق تطبيقاً بحيث ق : س← ص معرّفاً بالمخطط الآتي. بيّن فيما إذا كان التطبيق ق شاملاً أم لا ، ولماذا؟



الحل: المدى = {٢ ، ٣ ، ٥ }

المجال المقابل = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

المدى ≠ المجال المقابل

∴ التطبيق ق ليس شاملاً

مثال٣ : لتكن س= {١،٢، ٣}، ص= {٠، ٢ ، ٣ ، ٨ } ، ت : س← ص تطبيقاً حيث إن ت(س) = س^{٢} −١. اكتب التطبيق ت بذكر عناصره ثم بيّن فيما إذا كان شاملاً أم لا ، ولماذا؟

الحل: ت(س)=س^{٢}−١

ت(١) =(١)^{٢}−١ = ٠

ت(٢) =(٢)^{٢}−١ = ٤ − ١ = ٣

ت(٣) =(٣)^{٢}−١ = ٩ − ١ = ٨

ت= {(١ ، ٠)، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٨)}

المدى = {٠، ٣ ، ٨}

∴ التطبيق ت ليس شاملاً لأن المدى ≠ المجال المقابل (ص)

٢. التطبيق المتباين:

يقال لتطبيقٍ ما إنه **متباين** إذا اقترن أي عنصران مختلفان من المجال بعنصرين مختلفين من المجال المقابل. فإذا كان $س_١ ، س_٢ \ni$ المجال ، $س_١ \neq س_٢$ فإن $ت(س_١) \neq ت(س_٢)$

أي أن: كل عنصرين مختلفين من عناصر المجال لهما صورتان مختلفتان في المجال المقابل.

مثال١ : إذا كانت س= { ١، ٢ ، ٣ ، ٤}، ص= {١، ٤ ، ٩ ، ١٦ } ، وكانت ت تطبيقاً من س←ص بحيث ت(س) = $س^٢$، بيّن نوع التطبيق (شامل ، متباين).

الحل: ت(س) = $س^٢$

ت(١) = $(١)^٢$ = ١

ت(٢) = $(٢)^٢$ = ٤

ت(٣) = $(٣)^٢$ = ٩

ت(٤) = $(٤)^٢$ = ١٦

التطبيق ت شامل لأن المدى = المجال المقابل (ص)

التطبيق ت متباين لأن ت(١) ≠ ت(٢) ≠ ت(٣) ≠ ت(٤)

مثال٢: إذا كانت س= {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢}، ص= { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، وكان هـ : س←ص تطبيقاً بحيث س← $س^٢$+ ١ . هل التطبيق هـ متباين؟ ولماذا؟

الحل: س← $س^٢$+ ١

-٢← $(-٢)^٢$ + ١ = ٤ + ١ = ٥

-١← $(-١)^٢$+ ١ = ١ + ١ = ٢

٠← $(٠)^٢$ + ١ = ٠ + ١ = ١

١← $(١)^٢$ + ١ = ١ + ١ = ٢

٢← $(٢)^٢$ + ١ = ٤ + ١ = ٥

∴التطبيق هـ غير متباين لأن -٢≠٢ لكن هـ (-٢) = هـ (٢) = ٥

لاحظ أن التطبيق في المثال٣ من أمثلة (التطبيق الشامل) هو تطبيق متباين.(لماذا؟)

٣. التطبيق(تقابل) :

يقال لتطبيقٍ ما إنه **تقابل** إذا كان شاملاً ومتبايناً في آن واحد.

مثـــال١: إذا كانـــت س= {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }، ص= {٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ } ، وأن ت: س ← ص تطبيقاً بحيث س ← س+ ٣ ، بيّن نوع التطبيق ت.

الحل: س ← س+ ٣

٢ ←٢ + ٣ = ٥

٤ ←٤ + ٣ = ٧

٦ ←٦ + ٣ = ٩

٨ ←٨ + ٣ = ١١

المدى = {٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ } = **المجال المقابل**

∴ التطبيق **ت** شامل

∵ ٢ ≠ ٤ ≠ ٦ ≠ ٨ وأن **ت**(٢) ≠ **ت**(٤) ≠ **ت**(٦) ≠ **ت**(٨)

∴ التطبيق **ت** متباين

وعليه فأن التطبيق **ت** تقابل

مثـــال٢ : إذا كانـــت س= { ٠ ، ٢ ، ٤ }، ص= { ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ } ، وأن ل: س ← ص تطبيقـــاً بحيث ل(س) = ٢س+ ٥ ، بيّن نوع التطبيق ل .

الحل: ل(س) = ٢س+ ٥

ل(٠) = ٢ × ٠ + ٥ = ٠ + ٥ = ٥

ل(٢) = ٢×٢ + ٥ = ٤ + ٥ = ٩

ل(٤) = ٢ × ٤ + ٥ = ٨ + ٥ = ١٣

المدى = { ٥ ، ٩ ، ١٣}

∴ التطبيق **ل** غير شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل (**ص**)

∵ ٠ ≠ ٢ ≠ ٤ وأن ل(٠) ≠ ل(٢) ≠ ل(٤)

∴ التطبيق **ل** متباين

∴ التطبيق **ل** ليس تقابلاً

تمارين (١ – ٢)

١) إذا كانــت س= {–١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }، ص= {١ ، ٢ ، ٥ }، ت : س ← ص تطبيقــاً بحيــث ت(س) = س^{٢}+١: أ) اكتب ت بذكر عناصره. ب) بيِّن نوع التطبيق.

٢) إذا كان ت : ط ← ط تطبيقاً بحيث إن ت(س)= س+٣ :

أ) جد كلاً من ت(٠) ، ت(٤). ب) إذا كان ت(س) = ٩ فجد قيمة س.

ج) بيّن نوع التطبيق مع ذكر السبب.

٣) إذا كانت س = {٠ ، ١ ، –١ ، –٢ } ، ص = مجموعة الأعداد الصحيحة ، وأن ت : س ← ص تطبيقاً ، بحيث ت(س) = ٧ – ٢س فجد :

أ) اكتب ت بذكر عناصره. ب) بين نوع التطبيق ت.

٤) إذا كانــت س= {–٣ ، –٢ ، ١ ، ٢}، ص= {–٤ ،–٢ ، ٢، ٨} ، هـ : س ← ص تطبيقــاً حيث هـ(س) = س^{٢} – س– ٤ . جد مدى التطبيق ثم بيّن نوعه مع ذكر السبب.

٥) حدّد الإجابة الصحيحة لكلٍ ممّا يأتي:

١) إذا كانت س= {–١ ، ٠ ، ١ }، ت : س ← س تطبيقاً بحيث إن ت(س)= س^{٢}فإن ت:

أ) شامل ومتباين ب) ليس شاملاً ولا متبايناً

جـ) متباين وليس شاملاً د) شامل وليس متبايناً

٢) ليكن ت : ص ← ص تطبيقاً بحيث ت(س) = س^{٢} فإن ت ليس متبايناً لأن:

أ) المدى ≠ المجال المقابل ب) المدى = المجال المقابل

جـ) ت(٣) = ت(–٣) د) ت(٣) ≠ ت(–٣)

٣) إذا كان ت : ط ← ص تطبيقاً حيث إن ت(س) = ٢س – ٥ ، فإن ت(٤) =

أ) –٤ ب) ٣ جـ) ٧ د) $\frac{٧}{٣}$

٤) إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٥} ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ }، ت: س ← ص تطبيقاً حيث أن ت = {(١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦)} فإن ت :

أ) شامل وليس متباين ب) ليس متبايناً جـ) متباين وليس شاملاً د) تقابل

٥) إذا كانت ص مجموعة الأعداد الصحيحة، هـ: ص ←{ –٣ } تطبيقاً بحيث أن:

هـ(س) = –٣ لكل س∋ ص فإن هـ :

أ) تقابل ب) شامل وليس متبايناً جـ) ليس شاملاً وليس متبايناً د) متباين وليس شاملاً


Math

الفصل الثاني
الأعداد الحقيقية

(٢-١) الحاجة إلى مزيد من الأعداد

في المرحلة الابتدائية تعرفنا على مجموعة الأعداد الطبيعية:

ط = { ٠، ١، ٢، ٣، .... } ثم درسنا في الصف الأول المتوسط مجموعة الأعداد الصحيحة

ص = { ...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، .... } وفي السنة الماضية تعرفنا إلى مجموعة الأعداد النسبية:

$ن = \{ \frac{أ}{ب} : أ ، ب \in ص ، ب \neq ٠ \}$.

ورأينا بأن مجموعة الأعداد الصحيحة هي توسيع للمجموعة **ط** والمجموعة ن هي توسيع للمجموعة ص

أي أن :

ط ⊆ ص ⊆ ن.

إن الغرض من توسيع مجاميع الأعداد بإضافة أعداد أخرى الغايـــة منه حل بعض المسائل والمعادلات التي لا يوجد لها حل في المجاميع السابقة . والسؤال الآن هل أن مجموعـة الأعـــداد النسبية تفي بالغرض لحل كل المعادلات أوالمسائل الحسابية أم نحتاج إلى نوع آخر(مجموعة أخرى) من الأعداد؟

لو نظرنا في حل المعادلة $س^٢ - ٢ = ٠$ فنجد أن $س^٢ = ٢$

أي أن س = ± $\sqrt{٢}$ والسؤال الآن هل أن $\sqrt{٢}$ عدد نسبي ؟

والجواب هو لا ؛ لأنه لا يوجد عدد مربعه يساوي ٢ من الأعداد النسبية بمعنى آخر لا يمكن وضع

$\sqrt{٢}$على صورة كسر $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠

لذا فأن $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي وكذلك فإن الأعداد $\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٢٣١}$ ، ....

ليست أعداد نسبية. وقد أتفق على تسميتها أعداد غير نسبية ولهذا السبب تم إضافة ن´ (مجموعة الأعداد غير النسبية) إلى مجموعة الأعداد النسبية ن لنحصل على مجموعة الأعداد الحقيقية التي يرمز لها بالرمز ح

أي أن :

ح = ن ∪ ن´

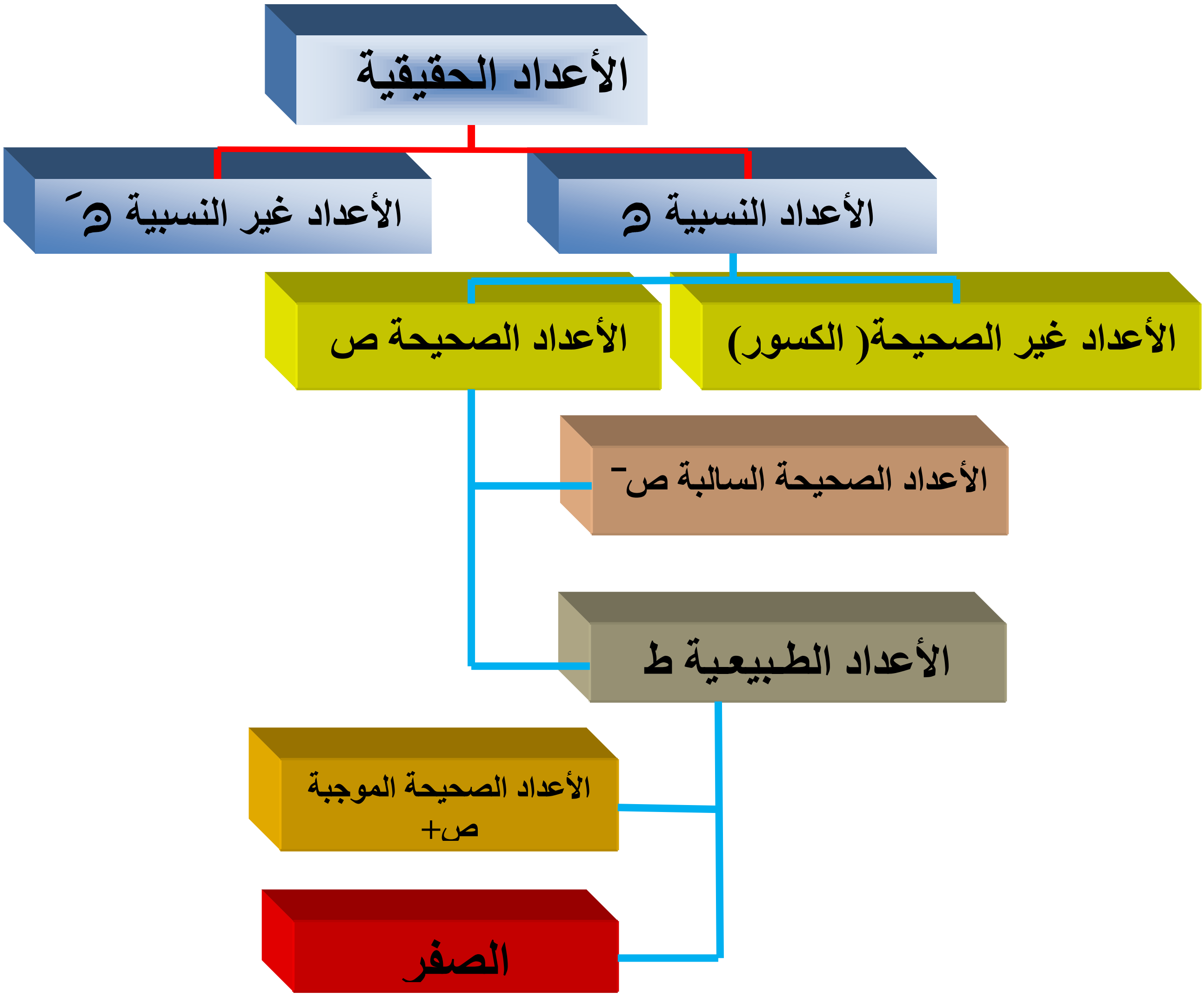
ملاحظة :

١) إن أي عدد غير نسبي يقع بين عددين نسبيين ، فمثلاً $\sqrt{١٩}$ يقع بين ٤ ، ٥ لأن:

$\sqrt{١٦} < \sqrt{١٩} < \sqrt{٢٥}$ أو :

$٤ < \sqrt{١٩} < ٥$ وكذلك بقية الأعداد غير النسبية

٢) المخطط الآتي يوضح العلاقة بين مجاميع الأعداد:



خط الأعداد الحقيقية

لقد درسنا سابقا تمثيل الأعداد الصحيحة والأعداد النسبية على خط الأعداد، ورأينا أنه توجد فراغات بين الأعداد ، لكن عندما نمثل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد سنلاحظ وجود تقابل بين أي نقطة من نقاط الخط المستقيم وأحد الأعداد الحقيقية حيث أن كل مستقيم يحتوي على عدد غير منته من النقاط وكذلك مجموعة الأعداد الحقيقية تكون مجموعة غير منتهية لذا فأن التقابل سيكون بينها وبين أي مستقيم.

(٢-٢) خواص الأعداد الحقيقية

بالنظر لوجود تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة نقاط الخط المستقيم فإن مجموعة الأعداد الحقيقية تكون مجموعة مرتبة، وهذه خاصية مهمة من خواص مجموعة الأعداد الحقيقية والتي نستنتج منها ما يأتي :

أ- إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن واحدة من العلاقات الآتية فقط تكون صحيحة:

١) أ = ب ، ٢) أ > ب ، ٣) أ < ب

ب- إذا كان أ عدداً حقيقياً فإن واحدة من العلاقات الآتية فقط تكون صحيحة:

١) أ = ٠ ، ٢) أ > ٠ ، ٣) أ < ٠

أمثلة: إذا كان -٥ ، ٠ ، √٢٦ ، -√٢ ، ٣/٤ ، √١٩ ∈ ح

-٥ < ٠ ، √٢٦ > ٠ ، -√٢ < ٠ ، ٣/٤ > ٠ ، √١٩ > ٠

(٢-٣) بعض خواص العمليات على الأعداد الحقيقية

أولاً: خواص عملية الجمع

١) إذا كان أ ، ب ∈ ح فإن (أ + ب) ∈ ح (المجموعة ح مغلقة تحت عملية الجمع)

٢) أ + ب = ب + أ لكل أ ، ب ∈ ح (خاصية الإبدال)

٣) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) لكل أ ، ب ، جـ ∈ ح (خاصية التجميع)

٤) أ + ٠ = ٠ + أ = أ لكل أ ∈ ح (خاصية العنصر المحايد الجمعي)

٥) أ + (− أ) = (− أ) + أ = ٠ لكل أ ∈ ح (خاصية النظير الجمعي)

ملاحظة:

عملية الطرح على الأعداد الحقيقية تعرف بالشكل:

أ − ب = أ + (− ب)

إن عملية الطرح ليست إبدالية لأن (أ − ب ≠ ب − أ)

ثانياً: خواص عملية الضرب

١) أ × ب ∈ ح لكل أ ، ب ∈ ح (خاصية الإغلاق)

٢)(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) لكل أ ، ب ، جـ ∈ ح (خاصية التجميع)

٣) أ × ب = ب × أ لكل أ ، ب ∈ ح (خاصية الإبدال)

٤) أ × ١ = ١ × أ = أ لكل أ ، ب ∈ ح (العنصر المحايد الضربي)

٥) أ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$ × أ = ١ لكل أ ∈ ح ، أ ≠ صفر (المعكوس الضربي المقلوب)

٦) أ× ٠ = ٠ ×أ = ٠ لكل أ ∈ ح

٧) أ × ب = ٠ يعني ان: اما أ = ٠ أو ب = ٠ لكل أ ، ب ∈ ح

٨) $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{أ × جـ}{ب × جـ}$ = $\frac{أ ÷ جـ}{ب ÷ جـ}$ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ب ، جـ ≠ ٠

مثال: $\frac{١}{٢} = \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٣} = \frac{٣}{٦}$

٩) أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ لكل أ ، ب ، جـ ∋ ح (خاصية التوزيع)

١٠) أ × (ب − جـ) = أ ب − أ جـ لكل أ ، ب ، ج ∋ ح (خاصية التوزيع)

١١) أ (−ب) = (− أ) ب = − (أ ب)

١٢) (− أ) (−ب) = أ × ب = أ ب

١٣) −(− أ) = أ لكل أ ∋ح

١٤) أ ÷ ب = أ × $\frac{١}{ب}$ لكل أ ، ب ∋ح ، ب ≠ صفر

ملاحظة:

عملية القسمة في الأعداد الحقيقية تعني الضرب بالمعكوس الضربي

(٢− ٤) الجذور التربيعية

يقال للعدد الحقيقي **ب** بأنه الجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب أ إذا كان مربع العدد **ب** يساوي العدد أ أي أنه: إذا كان أ عددا حقيقيا موجباً فإن :

$\sqrt{أ}$ = **ب** يعني إن **ب** هو العدد الموجب الوحيد الذي يحقق ب^{٢} = أ

أما بالنسبة للأعداد الحقيقية السالبة فليس لها جذر تربيعي في مجموعة الأعداد الحقيقية.

بعض خواص الجذر التربيعي:

١) $\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$ ∀ أ ، ب ∋ ح

٢) $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ ، ب ≠ ٠

مثال ١:

$$\sqrt{٣٦} = \sqrt{٤ \times ٩} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٩} = ٢ \times ٣ = ٦$$

$$\sqrt{\frac{١٦}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$$

مثال ٢:

جد ناتج كل مما يأتي :

$$\sqrt{١\frac{١١}{٢٥}} \text{ ، } \sqrt{٠,٨١} \text{ ، } \sqrt{١,٦٩}$$

الحل:

$$\sqrt{١\frac{١١}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٣٦}{٢٥}} = \frac{\sqrt{٣٦}}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٦}{٥} = ١\frac{١}{٥}$$

$$\sqrt{٠,٨١} = \sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{٨١}}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٩}{١٠} = ٠,٩$$

$$\sqrt{١,٦٩} = \sqrt{\frac{١٦٩}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{١٦٩}}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{١٣}{١٠} = ١,٣$$

مثال ٣:

اختصر المقدار : $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨} + \sqrt{١٨}$

الحل:

$$\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ \times ٢} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$$

$$\sqrt{٨} = \sqrt{٤ \times ٢} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$$

$$\sqrt{١٨} = \sqrt{٩ \times ٢} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$$

∴ المقدار $= ٥\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = ١٠\sqrt{٢}$

مثال ٤ :

اختصر المقدار: $\sqrt{\frac{٣}{٢٥}} + \sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{\frac{٤}{٣}}$

الحل:

$$\sqrt{\frac{٣}{٢٥}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢٥}} = \frac{\sqrt{٣}}{٥} = \frac{١}{٥}\sqrt{٣}$$

$$\sqrt{\frac{١}{٣}} = \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٣}} = \frac{١ \times \sqrt{٣}}{\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$$

$$\sqrt{\frac{٤}{٣}} = \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{٢ \times \sqrt{٣}}{\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٣}$$

∴ المقدار = $\frac{١}{٥}\sqrt{٣} + \frac{١}{٣}\sqrt{٣} - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣} = \sqrt{٣}\left(\frac{١}{٥} + \frac{١}{٣} - \frac{٢}{٣}\right)$

$$= \left(\frac{٣ + ٥ - ١٠}{١٥}\right)\sqrt{٣} = \frac{-٢}{١٥}\sqrt{٣}$$

مثال٥:

اختصر المقدار: $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٨٠} + \sqrt{٣} \times \sqrt{١٥}$

الحل:

$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٤ \times ٥} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$$

$$\sqrt{٨٠} = \sqrt{١٦ \times ٥} = \sqrt{١٦} \times \sqrt{٥} = ٤\sqrt{٥}$$

$$\sqrt{٣} \times \sqrt{١٥} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣ \times ٥} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٥} = ٣\sqrt{٥}$$

∴ المقدار $= ٢\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٥}$

$$= (٢ - ٤ + ٣)\sqrt{٥} = \sqrt{٥}$$

مثال٦: جد ناتج المقدار الآتي: $\sqrt{٤٨} - \sqrt{٧٥} - \sqrt{١٢}$

الحل:

$$\sqrt{٤٨} - \sqrt{٧٥} - \sqrt{١٢} = \sqrt{١٦ \times ٣} - \sqrt{٢٥ \times ٣} - \sqrt{٤ \times ٣}$$

$$= ٤\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}$$

$$= -٣\sqrt{٣}$$

مثال٧: جد ناتج ما يأتي

$$٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٢٠} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$$

الحل:

المقدار $= ٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٤\times٥} - ٥\sqrt{\frac{١\times٥}{٥\times٥}}$

$$= ٢\sqrt{٥} + ٣\times٢\sqrt{٥} - \frac{٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٢٥}}$$

$$= ٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٥} - \frac{\cancel{٥}\sqrt{٥}}{\cancel{٥}}$$

$$= (٢ + ٦ - ١)\sqrt{٥}$$

$$= ٧\sqrt{٥}$$

أمثلة:

١) $٢(\sqrt{٣} + ١) = ٢\times\sqrt{٣} + ٢\times١ = ٢\sqrt{٣} + ٢$

٢) $\sqrt{٢}\times(-\sqrt{٢}) = -(\sqrt{٢}\times\sqrt{٢}) = -٢$

٣) $\sqrt{٧}(٢\sqrt{٧} - ٥) = \sqrt{٧}\times٢\times\sqrt{٧} - \sqrt{٧}\times٥ = ٢\times\sqrt{٧}\times\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٧}$

$$= ١٤ - ٥\sqrt{٧}$$

٤) $(\sqrt{٥} - ١)(\sqrt{٥} + ١) = \sqrt{٥}\times\sqrt{٥} + \sqrt{٥}\times١ - ١\times\sqrt{٥} - ١\times١$

$$= ٥ + \cancel{\sqrt{٥}} - \cancel{\sqrt{٥}} - ١$$

$$= ٤$$

٥) $(\sqrt{٢} + ٤)(\sqrt{٢} + ٣) = \sqrt{٢}(٣ + \sqrt{٢}) + ٤(٣ + \sqrt{٢})$

$$= ٣\sqrt{٢} + ٢ + ١٢ + ٤\sqrt{٢}$$

$$= (٣ + ٤)\sqrt{٢} + ١٤$$

$$= ٧\sqrt{٢} + ١٤$$

٦) $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٢} = (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$

$= \sqrt{٣}(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}) - \sqrt{٢}(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$

$= \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} - \sqrt{٣} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٣} \times \sqrt{٢} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}$

$= ٣ - \sqrt{٦} - \sqrt{٦} + ٢ = ٥ - ٢\sqrt{٦}$

٧) $\frac{١}{\sqrt{٣}} \div ٣ = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

$= \frac{١ \times \sqrt{٣}}{٣\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٩} = \frac{١}{٩}\sqrt{٣}$

(٢-٥) الجذور التكعيبية

يقال للعدد الحقيقي **ب** بأنه الجذر التكعيبي للعدد الحقيقي أ إذا كان مكعب العدد **ب** يساوي العدد أ أي أنه إذا كان أ عدداً حقيقياً فإن:

$\sqrt[3]{أ}$ = ب حيث ب هو العدد الحقيقي الوحيد الذي يحقق: $ب^3 = أ$

ملاحظة:

العدد الحقيقي السالب له جذر تكعيبي حقيقي سالب

من خواص الجذر التكعيبي:

١) $\sqrt[3]{أ\,ب} = \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب}$ لكل أ ، ب $\in$ ح

٢) $\sqrt[3]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}}$ ، لكل أ ، ب $\in$ ح ب $\neq$ ٠

مثال١: جد ناتج كل مما يأتي : $\sqrt[3]{\frac{٢٤}{٦٤}\,٣}$ ، $\sqrt[3]{٠,١٢٥}$

الحل:

$$\sqrt[3]{٣\frac{٢٤}{٦٤}} = \sqrt[3]{\frac{٢١٦}{٦٤}} = \frac{\sqrt[3]{٢١٦}}{\sqrt[3]{٦٤}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$$

$$\sqrt[3]{٠,١٢٥} = \sqrt[3]{\frac{١٢٥}{١٠٠٠}} = \frac{\sqrt[3]{١٢٥}}{\sqrt[3]{١٠٠٠}} = \frac{٥}{١٠} = ٠,٥$$

مثال ٢: اختصر المقدار:

$$2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

الحل:

$$2\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{8\times 2} = 2\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\times 2} = \sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[3]{\frac{1\times 2}{4\times 2}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{8}} = 2\times\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = 2\times\frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$$

∴ المقدار $= 4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$

$= (4 - 3 - 1)\sqrt[3]{2} = 0\times\sqrt[3]{2} =$ صفر

مثال ٣:

اختصر المقدار : $3\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

الحل:

$$3\sqrt[3]{192} = 3\sqrt[3]{64\times 3} = 3\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{3} = 3\times 4\sqrt[3]{3} = 12\sqrt[3]{3}$$

$$2\sqrt[3]{-24} = 2\sqrt[3]{-8\times 3} = 2\sqrt[3]{-8}\times\sqrt[3]{3} = 2(-2)\sqrt[3]{3} = -4\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1\times 3}{9\times 3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{27}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$$

∴ المقدار $= 12\sqrt[3]{3} - (-4\sqrt[3]{3}) + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$

$$= \left(12 + 4 + \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3} = \left(\frac{36 + 12 + 1}{3}\right)\sqrt[3]{3}$$

$$= \frac{49}{3}\sqrt[3]{3}$$

مثال٤: اختصر المقدار: $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{٢٥٠} - ٢\sqrt[٣]{٥٤}$

الحل:

$$\sqrt[٣]{١٢٨} = \sqrt[٣]{٦٤\times٢} = \sqrt[٣]{٦٤}\times\sqrt[٣]{٢} = ٤\sqrt[٣]{٢}$$

$$\sqrt[٣]{٢٥٠} = \sqrt[٣]{١٢٥\times٢} = \sqrt[٣]{١٢٥}\times\sqrt[٣]{٢} = ٥\sqrt[٣]{٢}$$

$$٢\sqrt[٣]{٥٤} = ٢\sqrt[٣]{٢٧\times٢} = ٢\sqrt[٣]{٢٧}\times\sqrt[٣]{٢} = ٦\sqrt[٣]{٢}$$

$\therefore$ المقدار $= ٤\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt[٣]{٢} - ٦\sqrt[٣]{٢}$

$$= (٤ + ٥ - ٦)\sqrt[٣]{٢} = ٣\sqrt[٣]{٢}$$

تمارين (٢- ١)

١) ضع في أبسط صورة:

أ) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - 7\sqrt{5}$

ب) $\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 3 + 3\sqrt{5} - 2 + 4\sqrt{5}$

جـ) $5\sqrt{7} - 3\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 3\sqrt{7} + 1$

٢) افتح (فك الأقواس):

أ) $2(\sqrt{2} - 7)$

ب) $-3(\sqrt{5} - 4)$

جـ) $\sqrt{6}(3\sqrt{6} - \sqrt{24})$

د) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$

هـ) $(\sqrt{5} - 2)^2$

و) $(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 5)$

٣) اختصر المقادير الآتية:

أ) $\sqrt{27} + \sqrt{75} - 3\sqrt{48}$

ب) $(1 + \sqrt{3})^2 (2 - \sqrt{3})$

جـ) $\frac{1}{2}\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{32}$

د) $\sqrt{12} + \frac{1}{5}\sqrt{75}$

هـ) $(\sqrt{3} \times \sqrt{27}) + (\sqrt{20} \times \sqrt{45})$

و) $\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + (\sqrt{3})^2$

ز) $\sqrt[٣]{-٥٤} + \frac{١٠}{\sqrt[٣]{٢٥٠}} + \sqrt[٣]{١٦}$

ح) $\sqrt[٣]{٨١} - \sqrt[٣]{٢٧} - ٥\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}}$

٤) اختصر المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

١) $٤\sqrt{٢} + \sqrt{١٨} - \sqrt{٨}$

٢) $\sqrt{٦٣} - ٢\sqrt{٢٨} + ٥\sqrt{٧}$

٣) $\sqrt{٢٠} + \sqrt{٤٥} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$

٤) $\sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٥٤}$

٥) $\sqrt[٣]{٨١} + \sqrt[٣]{٢٤} - \sqrt[٣]{\frac{١}{٩}}$

٦) $٢\sqrt{٢٧} - \sqrt{٤٥} + ٢\sqrt{٢٠} - \sqrt{١٢}$

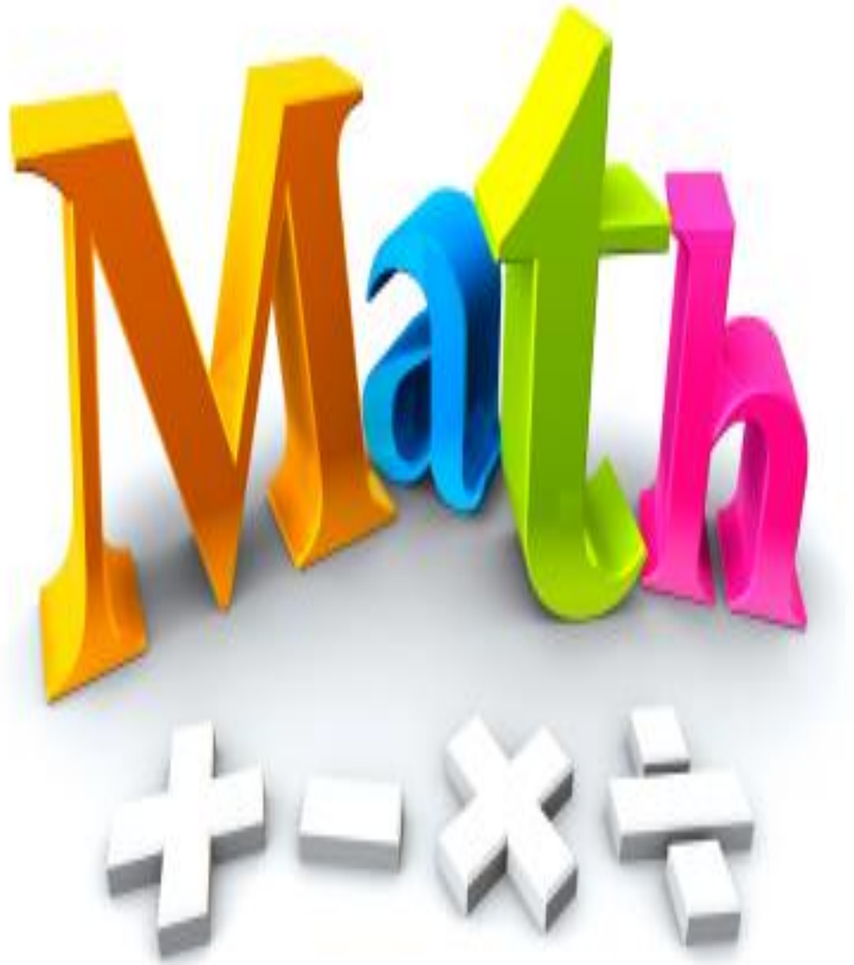
٥) جد أ^{٢} **إذا علمت أن:**

١) أ = $-$ ٢

٢) أ = $\sqrt{٣} + ٢$

٣) أ = $\sqrt{٥} - ٢$

٤) أ = $-٣\sqrt{٢}$


Math
+ - × ÷

الفصل الثالث

الحدوديات والتحليل

(٣–١) تحليل المقدار الجبري

قبل دراسة التحليل علينا معرفة كيفية استخراج العامل المشترك الأكبر لعدة حدود ليتسنى لنا الولوج إلى طرق تحليل المقدار الجبري.

استخراج العامل المشترك الأكبر للحدود الجبرية

هل تذكر الطريقة التي تعلمتها في السابق لإيجاد العامل المشترك الأكبر لعددين او اكثر؟
لإيجاد العامل المشترك الأكبر للعددين ٧٢ ، ١٢٦ مثلاً نحلِّل العددين إلى عواملهما الأولية، ثم نأخذ العوامل المشتركة فقط وبأصغر أس، أي أن:

٧٢ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٣ = ٢^{٣} × ٣^{٢}

١٢٦ = ٢ × ٣ × ٣ × ٧ = ٢ × ٣^{٢} × ٧

العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) = ٢ × ٣^{٢} = ١٨

٧٢	٢
٣٦	٢
١٨	٢
٩	٣
٣	٣
١	

١٢٦	٢
٦٣	٣
٢١	٣
٧	٧
١	

ويمكن أن نتبع طريقة مماثلة تماماً لإيجاد العامل المشترك الأكبر للحدين الجبريين ١٢س^{٢} ، ١٥س وهو ٣س لأن:

١٢س^{٢} = ٢ × ٢ × ٣ × س × س = ٢^{٢} × ٣ × س^{٢}

١٥س = ٣ × ٥ × س

وعليه فإن (ع.م.أ) = ٣س

أولاً: التحليل بطريقة إخراج العامل المشترك

إن عملية تحليل المقدار الجبري ما هي إلا عملية عكسية لعملية الضرب في الأقواس. فإذا كان لدينا الحد الجبري ٣س وضربناه في القوس (٤س + ٥) نحصل على:

٣س (٤س + ٥) = ٣س × ٤س + ٣س × ٥ **(خاصية التوزيع)**

= ١٢س^{٢} +١٥س

ولو أردنا تحليل المقدار الناتج سنقوم بإخراج **العامل المشترك الأكبر** بين الحدين وهو ٣س ثم نفتح قوساً ونقسم كل حد على العامل المشترك الأكبر ونضع الناتج داخل القوس.

١٢س^{٢} + ١٥س = ٣س (٤س + ٥) **(وذلك بقسمة كل حد على العامل المشترك)**

حيث $\frac{١٢س^{٢}}{٣س}$ = ٤س ، $\frac{١٥س}{٣س}$ = ٥

مثال١: حلِّل المقدار الجبري الآتي: **٣س^{٢} – ٩س + ٦**

الحل: نحلِّل المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر وهو (٣) فقط لأن الحد الثالث خالٍ من س ، ثم نقسم حدود المقدار جميعاً على العامل المشترك الأكبر، أي أن:

٣س^{٢} – ٩س + ٦ = ٣ (س^{٢} – ٣س + ٢)

مثال٢: حلِّل المقدار الجبري الآتي: **٢٠س^{٤} – ١٥س^{٣} + ١٠س^{٢} – ٥س**

الحل: واضح أن كل حد يقبل القسمة على س وكذلك على ٥ ، لذا فبعد قسمة كل حد على العامل المشترك وهو (٥س) نحصل على:

٢٠س^{٤} – ١٥س^{٣} + ١٠س^{٢} – ٥س = ٥س(٤س^{٣} – ٣س^{٢} + ٢س – ١)

ثانياً: التحليل بطريقة الفرق بين المربعين

الحد المربع: وهو الحد الذي يكون قسمه العددي عدداً مربعاً، وقسمه الرمزي يحمل أسَّاً زوجياً.

مثل: ٤س^{٢} ، ٩ص^{٦} ، ك^{٨} ،.........

فإذا كانت الحدانية بالشكل (حد١ مربع – حد٢ مربع) أي (ح$_{١}^{٢}$ – ح$_{٢}^{٢}$) مثل:

(س^{٢} – ص^{٢}) ،(٩أ^{٢} – ب^{٢}) ،(١٦ص^{٢} – ع^{٤})،......

فتحليلها يكون حاصل ضرب حدَّانيتين على الشكل:

$$ح_١^٢ - ح_٢^٢ = (ح_١ - ح_٢)(ح_١ + ح_٢)$$

أي أن: $(س^٢ - ص^٢) = (س - ص)(س + ص)$

وكذلك $(٩أ^٢ - ب^٢) = (٣أ - ب)(٣أ + ب)$

وكذلك $(١٦ص^٢ - ع^٤) = (٤ص - ع^٢)(٤ص + ع^٢)$

وعموماً فإن:

الفرق بين مربعي حدين يساوي الفرق بين الحدين مضروباً في مجموعهما حسب الترتيب.

مثال: حلّل كلاً من المقادير الآتية:

١) $٤س^٢ - ٩$ ٢) $٤٩ - ٢٥ص^٢$ ٣) $٤س^٣ - ٣٦س$

الحل:

١) $٤س^٢ - ٩ = (٢س - ٣)(٢س + ٣)$

٢) $٤٩ - ٢٥ص^٢ = (٧ - ٥ص)(٧ + ٥ص)$

ملاحظة:

لتحليل أي حدانية ، فإن أول ما نفكر فيه هو إخراج العامل المشترك الأكبر إن وجد ثم نحلل بطريقة الفرق بين مربعين إذا كان الناتج بعد إخراج العامل المشترك بشكل الفرق بين مربعين.

٣) $٤س^٣ - ٣٦س = ٤س(س^٢ - ٩)$ **(حيث إن ٤س عامل مشترك)**

$= ٤س(س - ٣)(س + ٣)$ **(التحليل بطريقة الفرق بين مربعين)**

تمارين (٣ – ١)

١) ضع كلمة (صح) أمام الحدّانية التي تمثِّل الفرق بين مربعين لكلٍ ممّا يأتي، ثم حلّلها:

أ) ٣س^{٢} – ٤ ب) س^{٤} – ٢٥

جـ) ٩س^{٢} – ٤٩ د) ص^{٤} + ٦٤

هـ) س^{٢} – ١٦ و) س^{٢} – ص

ز) س^{٢} – ص^{٢} ح) س^{٤} – ٩س^{٢} + ٤

٢) ضع كلمة (صح) أمام الحدودية التي تحوي على عامل مشترك لكلٍ ممّا يأتي، ثم حلّلها إن أمكن:

أ) س^{٣} – ٩ ب) ٥س^{٢} – ٢٠س

جـ) ٣أ^{٢} – ٦أ^{٢} + ١٢ د) ٢س^{٢} – ٤

هـ) س^{٢} – س + ٤ و) ١٥س^{٢} – ٢٥

ز) س^{٤} – س^{٢} – س ح) ٢س^{٢} – ٨ س + ٤

٣) حلّل الحدانيات والمقادير الجبرية الآتية:

أ) ٢س^{٢} – ٨س + ١٦ ب) م^{٤} – م^{٣} + م^{٢}

جـ) س^{٢} – ٢٥ د) ٩س^{٢} – ٣س

هـ) س^{٢} – ٩ص^{٢} و) ٣س^{٢} – ١٢

ز) س^{٤} – س^{٣} ح) س^{٥} – س^{٣}

ط) س^{٣} – ٩س^{٢} – ٧س ي) س^{٤} – ٨١

ثالثا: تحليل الحدانية على شكل فرق أو مجموع مكعبين

الحد المكعب: هو الحد الذي يكون قسمه العددي عدداً مكعباً وقسمه الرمزي يحمل أساً من مضاعفات العدد(٣) مثل ٨ $س^{٣}$ ، $ع^{٦}$ ، ٢٧$ل^{٩}$ ...... فإذا كانت الحدانية بالشكل:

(حد مكعب – حد مكعب) أو (حد مكعب + حد مكعب) فيكون تحليلها حاصل ضرب حدانية في حدودية وعلى الشكل الآتي:

(الحد الأول^{٣}–الحد الثاني^{٣})= (الحد الأول–الحد الثاني) (الحد الأول^{٢}+الأول× الثاني+الحد الثاني^{٢})

أي: $(ح_{١}^{٣} - ح_{٢}^{٣}) = (ح_{١} - ح_{٢})\ (ح_{١}^{٢} + ح_{١}ح_{٢} + ح_{٢}^{٢})$

وكذلك فإن: $(ح_{١}^{٣} + ح_{٢}^{٣}) = (ح_{١} + ح_{٢})\ (ح_{١}^{٢} - ح_{١}ح_{٢} + ح_{٢}^{٢})$

مثال: حلّ الحدانيات الآتية:

$(س^{٣} - ص^{٣}) = (س - ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢})$

$(٨هـ^{٣} + ل^{٣}) = (٢هـ + ل)(٤هـ^{٢} - ٢هـ ل + ل^{٢})$

ملاحظة: في تحليل الفرق بين المكعبين أو مجموعهما

١. تكون إشارة القوس الصغير نفس إشارة المقدار ، وإشارة الحد الثاني في القوس الكبير تكون عكس إشارة المقدار وتكون إشارتا الحدين الأول والثالث في القوس الكبير موجبة دائما .

٢. القوس الكبير لا يتحلل في دراستنا.

٣. إذا وجد عامل مشترك يكون خارج قوس أولاً قبل التحليل كما في الأمثلة السابقة

أمثلة: حلّ كلاً مما يأتي:

١) $س^{٣} - ٢٧ = (س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

٢) $١٦س^{٣} + ٢ = ٢(٨س^{٣} + ١) = ٢(٢س + ١)(٤س^{٢} - ٢س + ١)$ (عامل مشترك)

٣) $س^{٦} + ص^{٦} = (س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} - س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤})$

٤) $٢٧أ^{٣} - ١٢٥ب^{٣} = (٣أ - ٥ب)(٩أ^{٢} + ١٥أ ب + ٢٥ب^{٢})$

٥) $٢س^{٢} - ١٨ = ٢(س^{٢} - ٩)$ **عامل مشترك**

$= ٢(س - ٣)(س + ٣)$

٦) ٣س^{٣} +٢٤= ٣ (س^{٣} +٨) = ٣ (س +٢)(س^{٢} − ٢س + ٤)

٧) ٦ب^{٤} − ٦ب =٦ب (ب^{٣} − ١)= ٦ب (ب − ١)(ب^{٢} + ب + ١)

٨) س^{٤} − ١٦ = (س^{٢} − ٤)(س^{٢} + ٤)

= (س − ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)

ملاحظة:

لا يوجد تحليل لمجموع المربعين في الأعداد الحقيقية هو كما في المثال السابق.

تمارين (٣ ـ ٢)

حلل المقادير الجبرية الآتية:

١) ٣س^{٢} ـ ٩

٢) ٤س^{٣} ـ٢س^{٢}

٣) ٣س^{٤} ـ ١٢

٤) س^{٦} ـ ٦٤

٥) ٣س + ٩

٦) ٥س^{٣} + ١٥س

٧) س^{٢} ـ ٤٩

٨) ٣س^{٣} ـ ٨١ص^{٣}

٩) س^{٣} + ٦٤

١٠) أ^{٣} ـ أ س^{٢}

١١) ٢٧س^{٣} + ٢١٦ص^{٣}

١٢) ٦أ^{٢} س ـ ٦أ س^{٢}

١٣) س^{٤} ـ ٨١

١٤) س^{٣} + ١٢٥

(٣–٣) تحليل المقادير الجبرية (الحدوديات) ذات الثلاث حدود

بالبداية علينا أن نعرف إن الحدوديات ذات ثلاثة حدود التي سوف نهتم بتحليلها تكون بالصيغة **أس^{٢} + ب س + جـ** حيث أ ، ب ، جـ $\ni$ ح وإن أ ، ب ، جـ $\neq$ صفر أي مرتبة تنازليا أو تصاعديا من حيث الاس للمتغير وهنا لابد من الاشارة الى استخراج العامل المشترك الأكبر للحدود إن وجد ثم الشروع بالتحليل كما في طرق التحليل السابقة، ومثال على ذلك الحدوديات الآتية:

٣س^{٢}– ٦س + ٩= ٣ (س^{٢} – ٢س+ ٣)

٥س^{٢} + ١٠س – ٢٠ = ٥ (س^{٢} + ٢س – ٤)

س^{٣}+ ٥س^{٢} + ٢٥س = س(س^{٢} + ٥س +٢٥)

أما إذا لم يوجد عامل مشترك مثل الحدودية (س^{٢}– ٥س + ٦)، فنباشر بالتحليل

إن عملية التحليل كما تعلم هي تحويل المقدار إلى حاصل ضرب عاملين أو أكثر ، وهذه العملية هي عكس عملية فتح الأقواس التي درستها سابقاً، فلو لاحظت:

(س– ٣)(س – ٢) = س^{٢}–٢س – ٣س+ ٦

= س^{٢} – ٥س +٦

وعليه فإن تحليل هذه الحدوديات إلى عاملين يكون بالصورة الآتية:

(هـ س+ ل)(وس + م) حيث هـ × و= أ ، ل × م = جـ

على أن يكون: (هـ س × م) +(وس × ل) = ب س

ويمكن تلخيص طريقة التحليل هذه بما يأتي:

١) نفتح قوسين متماثلين : (   )(   )

٢) نحلل الحد الأول (أ س^{٢}) الى عاملين (هـ س)،(و س) نضع أحداهما في القوس الأول ونضع الآخر في القوس الثاني

٣) نضع إشارة الحد الثاني في القوس الأول و(حاصل ضرب إشارتي الحدين الثاني والثالث) في القوس الثاني.

٤) نحلل الحد الثالث (جـ) الى عاملين (م ، ل) نضع أحدهما في القوس الأول والآخر في الثاني.

٥) نتأكد من صحة الحل بحيث يكون المجموع الجبري لحاصل ضرب الحدود المتقاربة مع حاصل ضرب الحدود المتباعدة يساوي الحد الثاني في الحدودية.

٦) في حالة ظهور المجموع الجبري أعلاه يساوي الحد الثاني لكنه يعاكسه بالإشارة نبدل الإشارة بين القوسين.

وتسمى هذه الطريقة من التحليل بطريقة التجربة (ذلك لأننا نجرب عدة حالات)

مثال ١: حلل الحدودية: س^{٢} − ٧س + ١٢

الحل: س^{٢} − ٧س + ١٢ = (س − ٤)(س − ٣)

(لاحظ أن الحد الثالث ١٢ واحتمالات الحصول عليه ٤×٣ أو ٦×٢ أو ١٢×١ وقد اخترنا ٤×٣ لأن مجموعهما = ٧ وهو الحد الثاني)

مثال٢: حلل الحدودية: س^{٢} − ٥س − ٢٤

الحل: س^{٢} − ٥س − ٢٤ = (س − ٨)(س +٣)

(هنا ٢٤ نحصل عليها من ٢٤×١ أو ١٢×٢ أو ٨×٣ أو ٦×٤ لكننا نختار ٨×٣ لأن الفرق بينهما = ٥ = الحد الثاني)

مثال٣: حلل الحدودية: س^{٤} +٥س^{٢}− ٣٦

س^{٤} +٥س^{٢}− ٣٦ = (س^{٢} +٩)(س^{٢} − ٤) = (س^{٢} + ٩)(س − ٢)(س + ٢)

مثال٤: حلل الحدودية ٢س^{٢}− ١٣س + ٢١

٢س^{٢}− ١٣س + ٢١ = (٢س − ٧)(س − ٣)

− ٧س

− ٦س

− ١٣س الحد الثاني

مثال٥: حلل الحدودية: ٢س^{٢} − ٧س + ٣

لنجرب تحليلها كالآتي: (٢س − ٣)(س − ١) القريب × القريب = − ٣س

البعيد × البعيد = − ٢س

المجموع = − ٥س

ولأننا لم نحصل على الحد الثاني (− ٧س) عندئذ نقوم بتبديل الأعداد في الأقواس فيكون الحل:

(٢س − ١)(س − ٣) القريب × القريب = − س

البعيد × البعيد = − ٦س

المجموع = − ٧س

وكذلك يمكن أن نغير الحدود الأولى في الأقواس لنحصل :

(س − ٣)(٢س − ١) حيث يكون (− ٦س) + (− س) = − ٧س أي أننا نحصل على الحد الثاني.

مثال٦: حلل الحدودية : $٣س^٢ - ٥س - ٢$

لنجرب تحليلها **كالآتي:**

(٣س − ٢)(س + ١) لاحظ هنا يكون

−٢س

+ ٣س

س

أي أن المحاولة خاطئة لذا نأخذ الاحتمال الآخر:

(٣س − ١)(س + ٢) لكي نحصل على (− س + ٦س = ٥س) لذا نقوم بتغيير الإشارات داخل الأقواس لكي نحصل على(س − ٦س = − ٥س)

∴ $٣س^٢ - ٥س - ٢ = (٣س + ١)(س - ٢)$

مثال٧: حلل المقدار الجبري: $٢س^٢ - س - ٣$

لنجرب تحليلها كالآتي: (٢س − ٣)(س + ١)

لاحظ هنا مجموع (−٣س + ٢س) = − س

∴ $٢س^٢ - س - ٣ = (٢س - ٣)(س + ١)$

مثال٨: حلل الحدودية : $٤س^٢ + ٢٠س + ٢٥$

$٤س^٢ + ٢٠س + ٢٥ = (٢س + ٥)(٢س + ٥) = (٢س + ٥)^٢$

نلاحظ هنا بأن الأقواس متشابهة عندئذ يسمى هكذا مقدار جبري **بالمربع الكامل** وطريقة التحليل تسمى **التحليل بالمربع الكامل** حيث يكون:

القريب × القريب = البعيد × البعيد .

أي إن المربع الكامل هو حالة خاصة من طريقة التحليل بالتجربة.

ولكي يكون المقدار الجبري مربعاً كاملاً يجب أن يكون:

الحد الثاني=٢×الجذر التربيعي للحد الأول×الجذر التربيعي للحد الثالث بغض النظر عن الإشارة

على أن يكون كل من الحدين الأول والثالث حداً مربعاً وإشارته موجبة ويكون تحليله بالصورة:

$(\text{الجذر التربيعي للحد الأول}\ \ \text{إشارة الحد الثاني}\ \ \text{الجذر التربيعي للحد الثاني})^٢$

فمثلاً :

المقدار $٩س^{٢} - ١٢س + ٤$ يكون فيه الحدين الأول والثالث حدان مربعان إشارتيهما موجبة:

$٢ \times \sqrt{ح_{١}} \times \sqrt{ح_{٣}} = ٢ \times ٣س \times ٢ = ١٢س =$ الحد الثاني لذا فإنه مربع كامل

$٩س^{٢} - ١٢س + ٤ = (٣س - ٢)^{٢}$

بينما الحدودية $١٦س^{٢} - ٢٠س + ٩$ يكون فيها :

$٢ \times \sqrt{ح_{١}} \times \sqrt{ح_{٣}} = ٢ \times ٤س \times ٣ = ٢٤س \neq$ الحد الثاني

∴ الحدودية ليست مربعاً كاملاً .

ملاحظة: إذا أعطينا حدين من حدود المقدار الجبري المربع الكامل يمكن أن نجد الحد الثالث وذلك من العلاقة:

الحد الثاني = ٢ × $\sqrt{\text{الحد الأول}}$ × $\sqrt{\text{الحد الثالث}}$

ولو رمزنا للحد الأول بالرمز $ح_{١}$ ، وللحد الثاني بالرمز $ح_{٢}$ ، وللحد الثالث بالرمز $ح_{٣}$ فإن:

$ح_{٢} = ٢ \times \sqrt{ح_{١}} \times \sqrt{ح_{٣}}$ ومن هذه العلاقة نحصل على

$$\sqrt{ح_{١}} = \frac{ح_{٢}}{٢ \times \sqrt{ح_{٣}}} \Leftarrow ح_{١} = \left[\frac{ح_{٢}}{٢ \times \sqrt{ح_{٣}}}\right]^{٢}$$

$$\sqrt{ح_{٣}} = \frac{ح_{٢}}{٢ \times \sqrt{ح_{١}}} \Leftarrow ح_{٣} = \left[\frac{ح_{٢}}{٢ \times \sqrt{ح_{١}}}\right]^{٢}$$

مثال ١: أكمل الحدودية $٤س^{٢} - .... + ٢٥$ لتكون مربعاً كاملاً

الحل: $ح_{٢} = ٢ \times \sqrt{ح_{١}} \times \sqrt{ح_{٣}}$

$= ٢ \times \sqrt{٤س^{٢}} \times \sqrt{٢٥} = ٢ \times ٢س \times ٥ = ٢٠س$

∴ الحدودية $٤س^{٢} - ٢٠س + ٢٥$

مثال٢: أكمل الحدودية ٤س^{٢} + ١٢س + ... لتكون مربعاً كاملاً

الحل:

$$\text{ح}_{٣} = \left[\frac{\text{ح}_{٢}}{٢\times\sqrt{\text{ح}_{١}}}\right]^{٢} = \left[\frac{١٢\text{س}}{٢\times\sqrt{٤\text{س}^{٢}}}\right]^{٢} = \left[\frac{١٢\text{س}}{٢\times ٢\text{س}}\right]^{٢} = ٣^{٢} = ٩$$

∴ الحدودية ٤س^{٢} + ١٢س + ٩

مثال٣: ما قيمة م التي تجعل الحدودية م س^{٢} − ٣٠س + ٩ مربعاً كاملاً ؟

الحل:

$$\text{ح}_{١} = \left[\frac{\text{ح}_{٢}}{٢\times\sqrt{\text{ح}_{٣}}}\right]^{٢}$$

$$\text{م س}^{٢} = \left[\frac{٣٠\text{س}}{٢\times ٣}\right]^{٢}$$

م س^{٢} = ٢٥س^{٢}

∴ م = ٢٥

مثال٤: حلل الحدودية الآتية: ٢٥+٣٦س^{٢} −٦٠س

الحل: أولاً نرتب الحدودية كالآتي: ٣٦س^{٢} −٦٠س + ٢٥

٣٦س^{٢} −٦٠س + ٢٥ = (٦س − ٥)(٦س − ٥) = (٦س − ٥)^{٢}

مثال٥: بين هل أن الحدودية الآتية تمثل مربعاً كاملاً ؟   ٤س^{٢} −٨٠س + ١٠٠

الحل: لاحظ أن الحدين الأول والثالث حدان مربعان إشارتيهما موجبة

٤(س^{٢} −٢٠س + ٢٥)   عامل مشترك

$$٢\times\sqrt{\text{ح}_{١}} \times \sqrt{\text{ح}_{٣}} = ٢ \times \sqrt{٤\text{س}^{٢}} \times \sqrt{٢٥}$$

= ٢ × ٢س × ٥

= ٢٠س = ح$_{٢}$

∴ الحدودية مربعاً كاملاً

ملاحظة:

١) إذا كانت الحدودية غير مرتبة نقوم بترتيبها قبل البدء بالتحليل

٢) قبل إجراء عملية التحليل نتأكد من وجود عامل مشترك أم لا.

تمارين (٣-٣)

١) حلّل المقادير الجبرية الآتية:

أ) $س^{٢} - ٣س + ٢$ ب) $س^{٢} - ٧س - ١٨$

ج) $س^{٢} + ٣س - ١٨$ د) $س^{٢} - ١٧س - ١٨$

هـ) $س^{٢} - ٦س + ٢٧$ و) $٢س^{٢} - ٩س - ٥$

ز) $٤س^{٢} - ١٢س + ٩$ ح) $٣س^{٢} + ٢س - ٥$

ط) $٢س^{٢} - ٢س - ١٢$ ي) $س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤س$

٢) بين فيما إذا كانت الحدوديات الآتية مربعاً كاملاً ثم حللها إن أمكن .

أ) $٩س^{٢} - ٣٠س + ٢٥$ ب) $٩ - ٢٠س + ٤س^{٢}$

ج) $١٢س + ٤ + ٩س^{٢}$ د) $س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢}$

٣) جد قيمة م التي تجعل الحدوديات الآتية مربعاً كاملاً :

أ) $٤س^{٢} - م س + ٢٥$

ب) $م س^{٢} + ٢٠س + ٤$

ج) $٩س^{٢} + ٢٤س$ _ م

د) $٣٦س^{٢} + ٣٠س ص + م ص^{٢}$

٤) إذا كانت احتمالات التحليل هي :

أ) فرق مربعين ب) فرق مكعبين ج) مجموع مكعبين

د) التجربة هـ) عامل مشترك و) مربع كامل

ماذا تختار منها لتحليل كل من الحدوديات الآتية:

أ) $س^{٢} - ٥س + ٤$ ب) $س^{٣} - س^{٤}$ ج) $٤س^{٢} - ٩$

د) $٣س^{٢} - ١٨س + ١٥$ هـ) $س^{٤} + ١٦س^{٢}$ و) $٤٩س^{٢} + ٥٦س + ١٦$

(٣−٢) العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

لإيجاد (ع.م.أ) ، (م.م.أ) للمقادير الجبرية نقوم بتحليل كل من هذه المقادير إلى أبسط صورة.

أ) يكون العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) هو العوامل المشتركة فقط وبأصغر أس.

ب) يكون المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) هو العوامل المشتركة وغير المشتركة وبأكبر أس

مثال١: جد (ع. م. أ) ، (م. م. أ) للمقادير الجبرية الآتية:

س^{٢} − ٢٥ ، س^{٢} − ٣س − ١٠ ، س^{٢} − ٥س

س^{٢} − ٢٥ = (س − ٥)(س + ٥)

س^{٢} − ٣س − ١٠ = (س − ٥)(س + ٢)

س^{٢} − ٥س = س (س − ٥)

∴ ع. م. أ = (س − ٥) (لأنه العامل المشترك الوحيد)

م. م. أ = س (س − ٥)(س + ٥)(س + ٢) (هنا نختار كل العوامل عدا المكررة تكتب مرة واحدة وبأكبر أس)

مثال٢: جد (ع. م. أ) ، (م. م. أ) للحدوديات:

س^{٣} − ٨ ، س^{٢} − ٤ ، س^{٢} − ٤س +٤

س^{٣} − ٨ = (س − ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)

س^{٢} − ٤ = (س − ٢)(س + ٢)

س^{٢} − ٤س + ٤ = (س − ٢)^{٢} مربع كامل

∴ ع. م. أ = (س − ٢)

∴ م. م. أ = (س − ٢)^{٢} (س + ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)

مثال ٣: جد (ع. م. أ) ، (م. م. أ) للحدوديات:

٣س^{٢} − ١٢ ، ٢س^{٢}+٧ س + ٦ ، س^{٣} + ٨

٣س^{٢} − ١٢ = ٣ (س^{٢}− ٤) =٣ (س − ٢)(س + ٢)

٢س^{٢}+٧ س + ٦ = (٢س + ٣)(س + ٢)

س^{٣}+٨ = (س + ٢)(س^{٢} − ٢س + ٤)

∴ ع. م. أ = (س +٢)

م. م. أ = ٣ (س − ٢)(س + ٢)(٢س + ٣)(س^{٢} − ٢س +٤)

ملاحظة : في حالة عدم وجود عوامل مشتركة بين الحدوديات يكون العدد واحد هو ع. م. أ

مثال ٤: جد (ع. م. أ) ، (م. م. أ) للحدوديات:

$٢س^{٢}$ –٣س –٢ ، $س^{٢}$ – ٢س – ٣، $س^{٢}$ + ٢س +١

الحل:

$٢س^{٢}$ –٣س –٢= (٢س +١)(س –٢)

$س^{٢}$ – ٢س – ٣ = (س +١)(س– ٣)

$س^{٢}$ + ٢س +١= $(س + ١)^{٢}$

∴ ع. م. أ = ١

وأن م. م. أ = $(س + ١)^{٢}$(٢س +١)(س –٢) (س– ٣)

استخدام التحليل في تبسيط (اختصار) المقادير الجبرية

مثال١: اختصر المقدار $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$

الحل:

$$\text{المقدار} = \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} - ١)}{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)} = \dfrac{(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٣)}$$

ملاحظة:

١) إذا كان هناك عمليات مثل الضرب بين المقادير الجبرية نقوم بالتحليل أولاً ثم نختصر أي قوس في البسط مع أي قوس يشبهه في المقام

٢) عملية (÷) تحول الى عملية (×) حيث نقوم بقلب الكسور بعد القسمة.

مثال٢: اختصر المقدار $\dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{٢\text{س} - ٤} \times \dfrac{٤}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}$

الحل:

$$\text{المقدار} = \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}\cancel{(\text{س} + ١)}}{\cancel{٢}\cancel{(\text{س} - ٢)}} \times \dfrac{\cancel{٤}\,^{٢}}{\cancel{(\text{س} + ١)}(\text{س} + ١)} = \dfrac{٢}{(\text{س} + ١)}$$

مثال٣: جد ناتج ما يأتي

$$\dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١٨} \div \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥}{٢\text{س} + ١٠}$$

الحل:

$$\text{المقدار} = \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٣)}\cancel{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩)}}{\cancel{٢}\cancel{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩)}} \times \dfrac{\cancel{٢}\cancel{(\text{س} + ٥)}}{\cancel{(\text{س} + ٥)}\cancel{(\text{س} - ٣)}} = ١$$

ملاحظة:

إذا كانت هناك عمليتي × و ÷ في آن واحد نجري عملية × أولاً ثم عملية ÷ .

مثال٤: اختصر المقدار:

$$\frac{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ٤}{٢\text{س} - ٦}$$

$$\text{المقدار} = \frac{(٢\text{س} + ١)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}} \times \frac{\cancel{(\text{س} + ٣)}}{(\text{س} - ٣)\cancel{(\text{س} + ٣)}} \div \frac{\cancel{٢}(\text{س} - ٢)}{\cancel{٢}(\text{س} - ٣)}$$

$$= \frac{(٢\text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س} - ٣)}} \times \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}}{(\text{س} - ٢)} = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$$

مثال٥: بسط المقدار الآتي الى أبسط صورة

$$\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}} \div \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}} \times \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$$

الحل:

$$\text{المقدار} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{\text{س}} \div \left[\frac{\cancel{(\text{س} + ٢)}\cancel{(\text{س} + ٢)}}{\text{س}\cancel{(\text{س} + ٢)}} \times \frac{(\text{س} - ٢)}{\cancel{(\text{س} + ٢)}} \right]$$

$$= \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{\text{س}}} \times \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}}$$

$$= \text{س} + ٢$$

ملاحظة:

إذا كانت عمليتي + ، − بين المقادير الجبرية فنتبع الآتي:

١) نحلل جميع الحدوديات إن أمكن ثم نختصر في الكسر الواحد إن وجد اختصار.

٢) نقوم بتوحيد المقامات (بإيجاد م. م. أ)

٣) نقوم باختصار (اختزال) حدود البسط (وذلك بجمع الحدود المتشابهة).

مثال٦: اختصر المقدار الآتي:

$$\frac{س^{٣} - ٦٤}{س^{٣} + ٤س^{٢} + ١٦س} - \frac{س - ١}{س}$$

الحل:

$$\text{المقدار} = \frac{(س - ٤)\cancel{(س^{٢} + ٤س + ١٦)}}{س\cancel{(س^{٢} + ٤س + ١٦)}} - \frac{(س - ١)}{س}$$

$$= \frac{س - ٤}{س} - \frac{س - ١}{س} = \frac{س - ٤ - س + ١}{س} = \frac{-٣}{س}$$

مثال٧: اختصر الحدوديات الآتية إلى أبسط صورة $\frac{٤س^{٢} - ١}{٤س^{٢} - ٤س + ١} + ١$

الحل:

$$\text{المقدار} = \frac{\cancel{(٢س - ١)}(٢س + ١)}{\cancel{(٢س - ١)}(٢س - ١)} + ١$$

$$= \frac{٢س + ١}{٢س - ١} + \frac{١}{١}$$

$$= \frac{٢س + ١ + ٢س - ١}{٢س - ١} = \frac{٤س}{٢س - ١}$$

مثال٨: جد ناتج ما يأتي:

$$\frac{٢}{\text{س} - ١} + \frac{٥\text{س} - ١٥}{(\text{س} - ٣)^{٢}} - \frac{١٠}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}$$

الحل:

$$\text{المقدار} = \frac{٢}{\text{س} - ١} + \frac{٥\cancel{(\text{س} - ٣)}}{(\text{س} - ٣)^{\cancel{٢}}} - \frac{١٠}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{٢}{\text{س} - ١} + \frac{٥}{\text{س} - ٣} - \frac{١٠}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{٢(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} + \frac{٥(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} - \frac{١٠}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{٢\text{س} - ٦ + ٥\text{س} - ٥ - ١٠}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} = \frac{٧\text{س} - ٢١}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{٧\cancel{(\text{س} - ٣)}}{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} - ١)} = \frac{٧}{\text{س} - ١}$$

تمارين (٣ − ٤)

١) جد (ع. م. أ) ، (م. م. أ) للمقادير الجبرية الآتية:

أ) $\text{س}^{٢} - ١٦$ ، $\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢٠$ ، $\text{س}^{٣} - ٦٤$.

ب) $٢\text{س}^{٢} - ٨$ ، $\text{س}^{٣} - ٨$ ، $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦$.

جـ) $\text{س}^{٣} - \text{س ص}^{٢}$ ، $٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س ص}$ ، $\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣}$.

د) $٥\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص}$ ، $٥\text{ص}^{٢} + ٧\text{ص} - ٦$ ، $١٠\text{ص}^{٢} - ٦\text{ص}$.

٢) بسط المقادير الآتية:

أ) $$\frac{\text{س}^{٣} - ٨}{٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٨} \times \frac{٤}{\text{س}^{٢} - ٤}$$

ب) $$\frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٢١}{\text{س}^{٢} + ١٤\text{س} + ٤٩} \div \frac{\text{س} - ٧}{٢\text{س}^{٢} - ٩٨}$$

جـ) $$\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢}}{\text{س} - \text{ص}} \times \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ص}} \div \frac{\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$$

د) $$\frac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{\text{س} + ٣} \div \frac{\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$$

هـ) $$\frac{\text{ص}^{٢} + ٤\text{ص} + ٤}{\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص}} \div \frac{\text{ص} + ٢}{\text{ص}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ص} - ٢}$$

٣) بسط الحدوديات الآتية:

أ) $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢٥} + \frac{٥}{\text{س} + ٥}$

ب) $\frac{٣}{\text{س} - ١} + \frac{٢}{\text{س} + ٣} + \frac{٨}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}$

جـ) $\frac{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢} - \frac{٢\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ٥}{٢\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + ١٠}$

د) $\frac{\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣} - \frac{١}{\text{س} + ٣}$

الفصل الرابع

المتباينات والمعادلات

تعلمنا في السنوات السابقة حل المعادلة من الدرجة الأولى وذلك بعزل المتغير (المجهول) بطرف والأرقام (المعلوم) بطرف آخر من المعادلة، كما في حالة إيجاد حل المعادلة: ٢س – ٥ = ٣ س ∈ ط

الحل: ٢س = ٣ + ٥

٢س = ٨

س = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ ∈ **ط**

المتباينة هي عبارة عن كميتين جبريتين متباينتين(مختلفتين) في القيمة . ويدل على التباين وجود أحد الرموز (> ، < ، ≤ ، ≥)

(٤–١) إيجاد حل المتباينة من الدرجة الأولى:

المتباينة تشبه المعادلة إلا أنها تحتوي على علاقة أصغر أو أكبر وحلها يشبه حل المعادلة مع فارق:

إذا ضربنا أو قسمنا طرفي المتباينة في أو على عدد سالب تقلب علاقة التباين (من > إلى <) أو بالعكس.

مثال١ : جد مجموعة حلول المتباينة: ٢س – ٥ > ٣ ، س ∈ **ط**

الحل: ٢س > ٣ + ٥

٢س > ٨

س > $\frac{٨}{٢}$

∴ س > ٤

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

مثال٢: جد مجموعة حلول المتباينة: **٥س − ٢ ≤ ٢س + ٤ ، س ∈ ط**

الحل: ٥س − ٢س ≤ ٤ + ٢

٣س ≤ ٦

س ≤ $\frac{٦}{٣}$

س ≤ ٢

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، ٢ }

ملاحظة: في حالة وجود أقواس أو كسور نتخلص منها أولاً.

مثال٣: جد مجموعة حلول المتباينة: **٣(س −٢) ≤ س − ١٤ ، س ∈ ص**

الحل: ٣س − ٦ ≤ س − ١٤

٢س ≤ −٨

س ≤ $\frac{-٨}{٢}$

س ≤ −٤

مجموعة الحل = { س: س ∈ ص ، س ≤ −٤ }

مثال٤: جد مجموعة حلول المتباينة: $\frac{س}{٣}$ +١ ≤ $\frac{٣ س}{٢}$ − ٥ ، س ∈ ح

الحل: للتخلص من الكسور نضرب كل الحدود بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات وهو ٦

$\frac{س}{٣}$ × ٦ +١ × ٦ ≤ $\frac{٣ س}{٢}$ × ٦ − ٥ × ٦

٢س +٦ ≤ ٩س − ٣٠

٢س − ٩س ≤ −٦ − ٣٠

−٧س ≤ −٣٦ وبقسمة طرفي المتباينة على (−٧) نحصل على

س ≥ $\frac{٣٦}{٧}$ [لماذا]

∴ مجموعة الحل = { س: س ∈ ح ، س ≥ $\frac{٣٦}{٧}$ }

(٤–٢) مسائل لفظية يؤول حلها إلى متباينات

بعض المسائل الكلامية بعد ترجمتها نحصل على متباينة نحلها بنفس الطريقة التي سبق بيانها في الأمثلة السابقة. ودائما ما نبدأ بفرض ما مطلوب في السؤال بـ (س)، أو أي رمز آخر .

مثال١: جد أكبر عدد طبيعي إذا طرح من خمسة أمثاله العدد (٦) فإن الناتج يكون أصغر من (٢١).

الحل: نفرض أن العدد الطبيعي = س وعليه فإن خمسة أمثاله = ٥ س

∴ ٥س – ٦ < ٢١ ، س ∋ **ط**

٥س < ٢١ + ٦

٥س < ٢٧

س < $\frac{٢٧}{٥}$

س < ٥ $\frac{٢}{٥}$

مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ٥ $\frac{٢}{٥}$ هي: { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وأكبرها

∴ العدد = ٥

مثال٢: ما أكبر عدد صحيح إذا أضيف (١٦) إلى ضعفه فإن الناتج لا يزيد عن (٤٧)؟

الحل: نفرض أن العدد الصحيح = س وعليه فإن ضعفه = ٢س

∴ ٢س + ١٦ ≤ ٤٧ ، س ∋ **ص**

٢س ≤ ٤٧ – ١٦

٢س ≤ ٣١

س ≤ $\frac{٣١}{٢}$

س ≤ ١٥ $\frac{١}{٢}$

∴ العدد = ١٥ (العدد الصحيح الأكبرالذي يحقق الحل اعلاه هو ١٥)

تمارين (٤-١)

١) جد مجموعة الحلول للمتباينات الآتية:

أ) ٣س + ٥ > س + ٧   س ∋ **ط**

ب) ٥ (س – ١) >١٠   س ∋ **ص**

ج) $\frac{\text{٣س}}{\text{٢}}$ − ٤ < $\frac{\textbf{س}}{\textbf{٥}}$ + ١   س ∋ **ح**

د) ٣س + ٢ (س – ١) > س + ٢   س ∋ **ط**

٢) جد أكبر عدد طبيعي إذا طرح (١٠) من ثلاثة أمثاله فإن الناتج لا يزيد عن (٣١).

٣) ما هو أكبر عدد صحيح إذا أضيف (٣) إلى أربعة أمثاله فإن الناتج أصغر من (١٥)؟

٤) إذا طرح (٥) من ضعف عدد صحيح ، فإن الناتج يكون أصغر من (٧٠). جد أكبر قيمة ممكنة لهذا العدد.

(٤-٣) حل المعادلتين الآنيتين من الدرجة الأولى ذات مجهولين

المعادلتان الآنيتان تحتويان على مجهولين في آن واحد، وحلَّها يعني إيجاد قيمة كل من المجهولين التي تحقق المعادلتين في آن واحد وهي عبارة عن مجموعة تحوي زوج مرتب (س، ص) حيث تكتب قيمة س اولاً ثم ص. ويمكن حل المعادلتين بعدة طرق منها طريقة الحذف، وتكون بحذف أحد المجهولين وإيجاد قيمة المجهول الآخر، ثم نعوض عنه في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة المجهول المحذوف.

مثال١: جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين:

٣س − ص = ٥ .... (١)

س + ص = ٣ .... (٢)

الحل: بما أن معاملات ص متساوية وإشاراتها مختلفة فنجمع المعادلتين (٢)، (١) لنحصل على

٤س = ٨

س = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

ولإيجاد قيمة ص نعوض عن قيمة س في المعادلة ٢

٢ + ص = ٣

ص = ٣ − ٢ = ١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

مثال٢ : جد مجموعة حل المعادلتين:

٥س + ٣ص = ١٨ .... (١)   ٢س − ص = ٥ .... (٢)

الحل: ٥س + $\cancel{٣ص}$ = ١٨ .... (١)

٦س − $\cancel{٣ص}$ = ١٥ .... (٢)   **[ضربنا طرفي المعادلة٢ في ٣]**

ـــــــــــــــــــــــــــــ بالجمع

١١س = ٣٣

س = $\frac{٣٣}{١١}$ = ٣

وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (١) نحصل على:

٥×٣ + ٣ص = ١٨

٣ص = ١٨ − ١٥

٣ص = ٣

ص = $\frac{٣}{٣}$ = ١   ∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ١)}

مثال٣ : جد مجموعة حل المعادلتين:

٢س −٥ص = ٢٠ .... (١)

٣س −٢ص = ١٩ .... (٢)

الحل: ~~٦س~~ − ١٥ص = ٦٠ .... (١) **[ضربنا طرفي المعادلة (١) في ٣]**

−   +   −

+ ~~٦س~~ −٤ ص += ٣٨.......... (٢) **[ضربنا طرفي المعادلة (٢) في ٢]**

بالطرح

−١١ ص = ٢٢

ص = $\frac{٢٢}{-١١}$ = −٢

وبالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (١) نحصل على:

٢س − ٥×(−٢) = ٢٠

٢س = ٢٠ − ١٠

٢س = ١٠

س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

∴ مجموعة الحل = {(٥ ، −٢)}

مثال ٤ : عددان مجموعهما (٥٧)، والفرق بينهما (١٣) فما العددان؟

الحل: نفرض أن العدد الأول = س ، نفرض أن العدد الثاني = ص

∴ س + ص = ٥٧ .... (١)

س − ص = ١٣ .... (٢)

بالجمع

٢ س = ٧٠

س = $\frac{٧٠}{٢}$ = ٣٥ العدد الأول

وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (١) نحصل على:

٣٥ + ص = ٥٧

ص = ٥٧ − ٣٥

ص = ٢٢ العدد الثاني

تمارين (٤−٢)

١) جد مجموعة الحل للمعادلات الآنية الآتية:

أ) ٣س + ٥ص = ٢٥ ، ٢س − ٥ص = ٠

ب) ٤س + ص = ١٣ ، س − ص = −٣

جـ) ٣س + ص = ١٩ ، ٣س − ٢ص = ١٦

د) ٤س + ٣ص = ٢٤ ، ٢ س + ٣ص = ١٨

هـ) ٢س + ص = ١١ ، ٣س + ٢ص = ١٧

٢) عددان صحيحان الفرق بينهما (٧) وحاصل جمع أحدهما مع ضعف الثاني يساوي (٢٢) فما العددان؟

٣) زاويتان متتامتان (مجموعهما ٩٠) قياس إحداهما يزيد (٣٦)° عن ضعف قياس الأخرى، فما قياس كل من الزاويتين؟

(٤–٥) حلّ المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

كما مرّ بنا سابقاً ، يقصد بالمعادلة من الدرجة الثانية بأن أعلى أس للمتغير فيها هو (٢) مثل:

س^{٢} ، أو ص^{٢} ، أو هـ^{٢}، ... وصيغتها العامة : **أ س^{٢} + ب س + جـ = د** ، أ ، ب، جـ ، د ∋ ح ، أ ≠٠.

ولحلها يجب تصفير المعادلة أولاً ثم نحلل الطرف الأيمن منها بإحدى طرق التحليل لنحصل على حاصل ضرب عاملين مساوٍ للصفر. ومن المعلوم أنه إذا كان حاصل ضرب عاملين = صفراً ، فهذا يعني إما العامل الأول = صفراً ، أو العامل الثاني = صفراً (راجع خواص الأعداد الحقيقية). وعليه فمن كل منهما نكون معادلة من الدرجة الأولى نحلها لنجد قيمة المجهول.

مثال١ : جد مجموعة حل المعادلة س^{٢} = ٥س ، س∋ ط

الحل: س^{٢}– ٥ س = ٠

س(س – ٥) = ٠

إما س = ٠

أو س – ٥ = ٠ ⇦ س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٥ }

مثال٢ : جد مجموعة حل المعادلة ٦س^{٢} = ١٥س ، س∋ ح

الحل: ٦س^{٢}– ١٥س = ٠

٣س(٢س–٥) = ٠

إما ٣س = ٠ ⇦ س = ٠

أو ٢س – ٥ = ٠ ⇦ ٢س = ٥ ⇦ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {٠ ، $\frac{٥}{٢}$}

مثال٣ : جد مجموعة حل المعادلة ٤(هـ^{٢}– ٣) = ٣هـ – ١٢ هـ∋ ح

الحل: ٤هـ^{٢}– $\cancel{١٢}$ – ٣هـ + $\cancel{١٢}$ = ٠

٤هـ^{٢}– ٣هـ = ٠

هـ (٤هـ–٣) = ٠

إما هـ = ٠

أو ٤هـ– ٣ = ٠ ⇦ ٤هـ = ٣ ⇦ هـ = $\frac{٣}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {٠ ، $\frac{٣}{٤}$}

مثال ٤ : جد مجموعة حل المعادلة $س^٢ = ١٦$ ، س∋ ص

الحل: $س^٢ - ١٦ = ٠$

(س −٤) (س + ٤) = ٠

إما س −٤ = ٠ ⇦ س = ٤

أو س +٤ = ٠ ⇦ س = −٤

∴ مجموعة الحل في ص = { −٤ ، ٤}

مثال ٥ : جد مجموعة حل المعادلة $٢س^٢ = ٨$ ، س∋ ص

الحل: $٢س^٢ - ٨ = ٠$

$س^٢ - ٤ = ٠$ [بقسمة الطرفين على ٢]

(س −٢) (س + ٢) = ٠

إما س −٢ = ٠ ⇦ س = ٢

أو س +٢ = ٠ ⇦ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٢ }

مثال ٦ : جد مجموعة حل المعادلة $٣س^٢ - ١ = ٢٦$ ، س∋ ص

الحل: $٣س^٢ - ١ - ٢٦ = ٠$

$٣س^٢ - ٢٧ = ٠$

$س^٢ - ٩ = ٠$ [بقسمة الطرفين على ٣]

(س −٣) (س + ٣) = ٠

إما س −٣ = ٠ ⇦ س = ٣

أو س +٣ = ٠ ⇦ س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−٣ ، ٣ }

مثال ٧ : حل المعادلة الآتية: $س^٢ - ٥س - ١٤ = ٠$ ، س∋ ص

الحل: (س −٧) (س + ٢) = ٠

إما س −٧ = ٠ ⇦ س = ٧

أو س +٢ = ٠ ⇦ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٢ }

مثال٨ : حل المعادلة الآتية: $س(٢س - ٥) = ٣$ ، $س \in ح$

الحل: $٢س^٢ - ٥ س - ٣ = ٠$

$(٢س + ١) (س - ٣) = ٠$

إما $٢س + ١ = ٠$ ⇦ $س = \frac{-١}{٢}$

أو $س - ٣ = ٠$ ⇦ $س = ٣$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{ \frac{-١}{٢} ، ٣ \}$

مثال٩ : حل المعادلة الآتية: $\frac{س^٢}{٢} + \frac{٣س}{٤} = ٥$ ، $س \in ح$

الحل: بضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وهو (٤) ، ونقل كل الحدود لجهة واحدة نحصل على:

$٢س^٢ + ٣س - ٢٠ = ٠$

$(٢س - ٥) (س + ٤) = ٠$

إما $٢س - ٥ = ٠$ ⇦ $س = \frac{٥}{٢}$

أو $س + ٤ = ٠$ ⇦ $س = -٤$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{ \frac{٥}{٢} ، -٤ \}$

مثال١٠ : جد عددين صحيحين متتاليين موجبين مجموع مربعيهما (٢٥).

الحل: نفرض العدد الأول = س $\therefore$ العدد الثاني = س + ١ **[لماذا؟]**

$س^٢ + (س+١)^٢ = ٢٥$

$س^٢ + س^٢ + ٢س + ١ = ٢٥$

$٢س^٢ + ٢س - ٢٤ = ٠$ (بالقسمة على ٢)

$س^٢ + س - ١٢ = ٠$

$(س + ٤) (س - ٣) = ٠$

إما $س + ٤ = ٠$ ⇦ $س = -٤$ يهمل (لماذا)

أو $س - ٣ = ٠$ ⇦ $س = ٣$ العدد الأول

$\therefore$ العدد الثاني = $٣+١=٤$

مثال١١ : مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار (٤) م ومساحته (٤٥) م^{٢} جد كل من بعديه.

الحل: نفرض عرض المستطيل = س ∴ طول المستطيل = س + ٤

مساحة المستطيل= الطول × العرض

س ×(س+٤) = ٤٥

س^{٢} + ٤س − ٤٥ = ٠

(س +٩) (س − ٥) = ٠

إما س + ٩ = ٠ ⇦ س = −٩ يهمل **[لماذا] ؟**

أو س − ٥ = ٠ ⇦ س = ٥ م عرض المستطيل

∴ طول المستطيل = ٥ + ٤ = ٩ م

ملاحظة: لاحظ أن مجموعة الحل في الأمثلة السابقة جميعاً تحتوي على عنصرين لأن معادلاتها من الدرجة الثانية.

تمارين (٤ – ٣)

أ) جد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث س ∋ ح:

١) س^{٢} = ٤٩

٢) ٢س^{٢} = ٨

٣) س^{٢}– ١ = ٨

٤) ٢س^{٢} = ١٠س

٥)٤س^{٢}– ٢ = ٢س^{٢} + ٣٠

٦) ٢(س^{٢}+ ٥) = س^{٢}+ ١٩

٧)٩س^{٢} = ١٢س

٨) ٢س(س – ٥) = ٣س

٩) (س – ٤) (س + ٤) = ٢٠

١٠) س^{٢} – ٧س = ١٨

١١) س(٢س + ٧) = ٤

١٢) $\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٥ س}{٦} = ٧$

ب)عددان صحيحان متتاليان موجبان مجموع مربعيهما (٦١) فما هما؟

ج) مستطيل يقل عرضه عن طوله بمقدار (٨) م ومساحته (٢٠) م^{٢} فما بعداه؟

د)عدد صحيح أربعة أمثال مربعه يزيد عن خمسة أمثاله بمقدار (٧٥) فما العدد؟

الفصل الخامس

الإحصاء

يُعتبر الإحصاء واحداً من فروع الرياضيات التطبيقية التي من خلالها يتم دراسة وتبويب وتحليل البيانات للحصول على حلول للعديد من المشاكل وفي جميع مجالات الحياة الاقتصادية والسكانية والطبية وغيرها. وقد درسنا في الصف الثاني نوعين من مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) وهي الوسط الحسابي والوسيط للبيانات غير المبوبة، وسنتناول في هذا الفصل الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة، وللبيانات المبوبة البسيطة، والوسيط للبيانات غير المبوبة، وكذلك نوعاً آخراً من المتوسطات وهو المنوال.

(٥-١) الوسط الحسابي:

١- الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة:

علمنا أن الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات هو عبارة عن معدل مجموع القيم ، ويرمز له بالرمز ($\overline{س}$) ويحسب كالآتي:

$$\textbf{الوسط الحسابي} = \frac{\textbf{مجموع القيم}}{\textbf{عددها}}$$

مثال١ : إذا علمت أن درجات أحمد في مادة الرياضيات للفصل الأول ونصف السنة والفصل الثاني هي (٨٥ ، ٩٤ ، ٩١) على التوالي، فما هي درجة السعي السنوي لأحمد في هذه المادة؟

الحل:

إن عملية احتساب درجة السعي السنوي لكل مادة من المواد لأي طالب هي إحدى تطبيقات الوسط الحسابي. ولإيجاد السعي السنوي لأحمد نجمع درجاته للفصل الأول ونصف السنة والفصل الثاني ثم نقسم الناتج على عدد الدرجات (٣) وكالآتي:

$$\therefore \overline{س} = \frac{٨٥ + ٩٤ + ٩١}{٣} = \frac{٢٧٠}{٣} = ٩٠$$

مثال٢ : جد الوسط الحسابي لدرجات عبد الله في مادة الجغرافية إذا كانت درجاته فيها (٦٩ ، ٦٧ ، ٥١ ، ٥٣ ، ٦٠).

الحل:

$$\because \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مج القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{٦٩ + ٦٧ + ٥١ + ٥٣ + ٦٠}{٥} = \frac{٣٠٠}{٥} = ٦٠$$

٢- الوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

لاختصار تسجيل مجموعة من البيانات فإننا نسجلها في جدول تكراري (يبين تكرار كل قيمة) ومن ثم احتساب الوسط الحسابي لها، وذلك استناداً للقانون الآتي:

$$\textbf{الوسط الحسابي } (\bar{س}) = \frac{\textbf{مج (س × ك)}}{\textbf{مج (ك)}}$$

حيث س = القيمة ، ك = تكرار القيمة

مثال٣ : جد الوسط الحسابي لدرجات طلاب الصف الثالث الابتدائي في مادة العلوم والبالغ عددهم (٢٥) طالباً والمسجلة كالآتي:

٣	٥	٣	٨	٧	٦	٤	٤	٥
٤	٥	٥	٥	٦	٦	٦	٧	٧
٦	٥	٥	٦	٦	٧	٦		

الحل:

نلاحظ أن البيانات في هذا السؤال كبيرة وغير مرتبة وفيها درجات مكررة، لذا بإمكاننا تكوين جدول تكراري ننظم فيه هذه البيانات بحيث نلاحظ أن الدرجة (٣) تكررت مرتين، والدرجة (٤) تكررت ثلاث مرات، والدرجة (٥) تكررت سبع مرات، والدرجة (٦) تكررت ثمان مرات، والدرجة (٧) تكررت أربع مرات، والدرجة (٨) وردت مرة واحدة، لذا فإننا لتكوين الجدول التكراري نعمل حقلين

نضع في الأول الدرجات ونرمز لها بالرمز (س)، وفي الحقل الثاني تكرارها ونرمز له بالرمز (ك)، وكالآتي:

الدرجة (س)	٣	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
التكرار (ك)	٢	٣	٧	٨	٤	١	٢٥

ثم نقوم بضرب كل درجة (س) في تكرارها (ك) فنكون الحقل الثالث (س × ك) كالآتي:

(س × ك)	٦	١٢	٣٥	٤٨	٢٨	٨	١٣٧

وبعد جمع حاصل ضرب كل درجة في تكرارها والذي يساوي (١٣٧) وقسمته على العدد الكلي للدرجات والتي تمثل مجموع التكرارات (٢٥) نحصل على الوسط الحسابي لهذه البيانات التي قمنا بتبويبها وفق جدولاً تكرارياً وكالآتي:

$$\therefore \text{الوسط الحسابي } (\overline{\text{س}}) = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{١٣٧}{٢٥} = ٥,٤٨$$

(٥-٢) الوسيط

١) إذا كان عدد البيانات فردياً:

الوسيط لمجموعة من الأرقام مرتبة حسب قيمها (تصاعديا او تنازليا)، هي القيمة التي تتوسط هذه القيم. ويمكن حساب تسلسل هذه القيمة بالعلاقة الآتية:

$$\textbf{تسلسل الوسيط} = \frac{\text{ن} + ١}{٢}$$

حيث ن عدد البيانات الفردية

مثال٤ : ما الوسيط للقيم (٦ ، ٨ ، ٣ ، ٨ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ٤ ، ٨)؟

الحل:

نرتب هذه القيم ترتيباً تنازليا فتكون: (١٠ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٤ ، ٣)

∵ عدد البيانات = ٩ (فردي)

$$\text{تسلسل الوسيط} = \frac{ن + ١}{٢} = \frac{٩ + ١}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$$

∴ تسلسل الوسيط = ٥ (القيمة الخامسة بالترتيب)

∴الوسيط لهذه البيانات =٦

٢) إذا كان عدد البيانات زوجياً:

الوسيط هو معدل القيمتين اللتين تتوسطان البيانات المرتبة حسب قيمها تصاعديا او تنازليا. أي أننا نحصل على الوسيط للبيانات الزوجية باتباع الخطوات الآتية:

أ) نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً.

ب) نحدد القيمتين الوسطيتين بأن نقسم عدد البيانات (ن) على (٢) والناتج هو تسلسل القيمة الأولى والقيمة التي تليها في الترتيب هي الثانية أي:

$$\textbf{تسلسل القيمة الوسطية الأولى} = \frac{ن}{٢} \text{ ، } \textbf{تسلسل القيمة الوسطية الثانية} = \frac{ن}{٢} + ١$$

جـ) بعد تحديد القيمتين الوسطيتين، نجد معدلهما (مجموعهما مقسوماً على (٢)) الذي يمثل الوسيط لتلك البيانات.

مثال٥ : إذا كانت درجات (١٢) طالب في مادة الحديث هي: (٥٠ ، ٧٤ ، ٦٢ ، ٦١ ، ٨٠ ، ٩٠، ٧٧ ، ٨٠ ، ٦٥ ، ٨٥ ، ٩٢ ، ٦٦) فما هي الدرجة الوسيطة؟

الحل: نرتب درجات الطلاب ترتيباً تصاعدياً فتكون:

(٥٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٧٤ ، ٧٧، ٨٠ ، ٨٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٩٢)

نلاحظ هنا أن عدد القيم زوجي أي أن هناك قيمتان تتوسطان القيم، عندئذ يكون الوسيط هو معدل هاتين القيمتين، أي مجموعهما مقسوماً على (٢).

$$\text{تسلسل القيمة الوسطية الأولى} = \frac{ن}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$$

$$\text{تسلسل القيمة الوسطية الثانية} = \frac{ن}{٢} + ١ = \frac{١٢}{٢} + ١ = ٦ +١ = ٧$$

القيمة التي تسلسلها (٦) = ٧٤ ، القيمة التي تسلسلها (٧) = ٧٧

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{٧٤ + ٧٧}{٢} = \frac{١٥١}{٢} = ٧٥,٥$$

(٥-٣) المنوال:

هي القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها، أو القيمة الأكثر شيوعاً. وقد لا يكون للقيم منوال، وقد يوجد للقيم أكثر من منوال.

مثال٦ : ما المنوال لكل مجموعة مما يأتي من البيانات:

أ) ١٨ ، ١٢ ، ١١ ، ١٠ ، ١٠ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٢ ، ٢ ؟

ب) ١٦ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ؟

جـ) ٩ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٥ ، ٥ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ؟

الحل:

أ) نلاحظ أن القيمة (٩) في بيانات المجموعة (أ) تكررت أكثر من غيرها حيث تكررت ثلاث مرات.

$\therefore$ المنوال = ٩

ب) البيانات في المجموعة (ب) لا توجد فيها قيمة مكررة. لذا فإن بيانات المجموعة ب ليس لها منوال.

جـ) نلاحظ أن القيمة (٤) تكررت أربع مرات وكذلك القيمة (٧)، وقد اشتركتا في أكبر تكرار لذا فإن هذه المجموعة لها منوالان هما (٤) و(٧).

مثال٧ : ما المنوال للبيانات المبينة في المثال ٣ ؟

بعد عمل الجدول التكراري لتلك البيانات وكالآتي:

الدرجة (س)	٣	٤	٥	٦	٧	٨	**المجموع**
التكرار (ك)	٢	٣	٧	٨	٤	١	**٢٥**

نلاحظ أن أكبر تكرار هو (٨) وهو الذي يقابل القيمة (٦)

$\therefore$ المنوال = ٦

تمارين (٥-١)

١) جد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للقيم الآتية: (١٢ ، ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ٦).

٢) إذا علمت أن الوسط الحسابي لخمسة قيم هو (٦) وكانت أربع قيم منها هي: (٩ ، ٧ ، ٣ ، ٥)، فما القيمة الخامسة؟

٣) جد الوسيط للقيم الآتية: (٩ ، ٢ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٧ ، ٣٠).

٤) إذا كانت (٢ ، ٦ ، ٨ ، ٥) تحدث بتكرارات (١ ، ٤ ، ٢ ، ٣) على الترتيب، فما الوسط الحسابي لها؟

٥) درجات طالب في ستة امتحانات هي (٨٤ ، ٩١ ، ٧٢ ، ٦٨ ، ٨٧ ، ٧٨)، جد الوسط الحسابي لهذه الدرجات.

٦)الجدول الآتي يمثل توزيع درجات (١١٧) تلميذاً في امتحان ما. جد الوسط الحسابي والمنوال لها:

الدرجة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٤	٦	٩	١٠	٢٢	٢٨	١٦	١٢	٧	٢	١	١١٧

٧)الجدول الآتي يبين أوزان مجموعة من الأغنام في أحد الحقول. والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي والمنوال لأوزان هذه الأغنام:

الوزن	٤	٧	١٢	١٧	٢٠
عدد الأغنام	٢	٣	٤	٥	٦

٨) هل يوجد منوال للأعداد الآتية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٦ ، ٤ ، ٨ ، ١٠)؟ ولماذا؟ وما هو الوسط الحسابي والوسيط لها؟

٩) باعت الشركة العامة للخياطة في أحد الأيام (٢٤) فستاناً مقاساتها كالآتي:

٤٨	٤٢	٣٨	٤٢	٤٠	٤٢	٤٦	٤٢
٣٨	٤٦	٤٢	٣٨	٤٢	٤٢	٤٤	٤٤
٤٨	٤٢	٤٠	٣٨	٤٢	٤٦	٤٢	٤٢

جد المقاس الأكثر شيوعاً (المنوال).

الفهرست

تم بحمد الله