جمهورية العراق
رئاسة ديوان الوقف السنّي
دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية
قسم المناهج والتطوير

الرياضيات

للصف السادس الثانوي

تأليف

د . قاسم حسين علاوي
أستاذ الرياضيات المساعد
رئيس قسم الرياضيات
جامعة الأنبار

د . عبد الواحد حميد ثامر
أستاذ طرائق تدريس الرياضيات
رئيس قسم العلوم التربوية
جامعة الأنبار

تنقيح
لجنة الرياضيات في
دائرة التعليم الديني والدراسات
الإسلامية

الطبعة السابعة

١٤٤١هـ　　　　٢٠١٩ م

الإشراف العلمي

م.م أياد أنور إبراهيم

الإشراف الفني

أسماء عبدالله ياسين

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ لِّيَعْلَمَ أَن قَدْ أَبْلَغُواْ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ
بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًۢا ﴿٢٨﴾ ﴾

الجن: ٢٨

صدق الله العظيم

مُقَدِّمَة

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد رسول الله وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد ...

فإن لجنة الرياضيات في دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية في ديوان الوقف السنّي في جمهورية العراق تهنئ طلبتنا الأعزاء بالعام الدراسي الجديد وتقدم لهم الطبعة السابعة من كتاب الرياضيات للصف السادس الثانوي. وهي إذ تشيد بجهود الأستاذين الفاضلين مؤلفَي الكتاب، فإنه يسعدها أن تقدم بتواضع بالغ إضافات ترى أنها ضرورية لإثراء الكتاب وإخراجه بشكل أفضل وتساعد على حصول الفائدة المتوخاة منه والنهوض بالمستوى العلمي لطلبة المدارس الإسلامية. وقد تمثلت هذه الإضافات والتغييرات في تغيير شكل وحجم الطباعة وإدخال الألوان في إخراج الكتاب وكتابة القوانين والملاحظات بخط أكبر وأوضح وضمن إطار ملون،. كما قامت اللجنة بإثراء فصول الكتاب جميعها بأمثلة محلولة، وأسئلة متنوعة.

وقد تضمن الكتاب أربعة فصول أولها فصل **(مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق)** والذي من خلاله يتعلم الطالب مبدأ العدّ ومفكوك العدد وكيفية احتساب كل من التباديل والتوافيق. وفي الفصل الثاني **(الغاية)** يدرس كيفية إيجاد الغاية لمختلف أنواع الدوال. وشمل الفصل الثالث **(المشتقة)**، قواعد عملية الاشتقاق وبعدها التطبيقات الهندسية للمشتقة. أما الفصل الأخير الرابع **(التكامل)** فقد تضمن قواعد عملية التكامل غير المحدد.

واستمراراً في نهجنا في تعريف طلبتنا الأعزاء بعلماء المسلمين القدماء الذين كان لهم الفضل في تطوير علم الرياضيات والهندسة، والذي شرعنا به منذ الصف الأول فسنتعرف في الصف السادس على عالمنا الجليل **(البيروني)**.

ندعو الله أن ينتفع طلبتنا بما يتعلمون ويتقبل منّا ومنهم صالح الأعمال ويغفر لنا ولهم الزلل والخطأ ويكتبنا عنده في الصالحين المصلحين، ويهدينا بهديه لما يحبه ويرضاه ...

﴿ إِنَّ رَبِّي قَرِيبٌ مُّجِيبٌ ﴿٦١﴾ ﴾هود: ٦١

لجنة تقويم منهج الرياضيات

في

دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية

دور علماء المسلمين في الرياضيات

البيروني

(٣١٢-٣٨٨هـ/ ٩٧٣-١٠٤٨م)

هو العالم الجليل **أبو الريحان محمد بن أحمد البَيْرُوني**. وصف بأنه من بين أعظم العقول التي عرفتها الثقافة العربية الإسلامية، ولد في مدينة كاث عاصمة خوارزم في **أوزبكستان**، وقد أطلق على هذه المدينة اسم مدينة **البيروني** تخليداً لذكراه. و**البيروني** بلغة خوارزم تعني الغريب أو الآتي من خارج البلدة، سمّي به لكونه قليل المقام بخوارزم وأهلها يسمون الغريب بهذا الاسم.

وقد تلقى **البيروني** تعليمه في بلدته، حيث حفظ القرآن، وتعلّم مبادئ القراءة والكتابة والحساب، وشيئاً من الفقه والحديث مثل غيره من الطلاب الذين يبدؤون حياتهم العلمية. ثم اتجه إلى دراسة العلوم الطبيعية والرياضيات، بعد أن وجد في نفسه ميلاً إلى ذلك، فتتلمذ على يد **(أبي نصر منصور بن علي بن عراق)**، وكان عالماً مشهوراً في الرياضيات والفلك، وعمل تحت إشرافه في مرصده الفلكي. رحل إلى جرجان في سن الخامسة والعشرين، ونشر هناك أولى كتبه وهو (الآثار الباقية من القرون الخالية). كان عالم رياضيات وفيزياء وكان له أيضاً اهتمامات في مجال الصيدلة والفلك والتاريخ. أطلق عليه المستشرقون تسمية (**بطليموس العرب**).

سميت فوهة بركانية على سطح القمر باسمه إلى جانب ١٨ عالماً عربياً لامعاً منهم الخوارزمي وابن سينا. تعلّم اللغة اليونانية والسنسكريتية خلال رحلاته وكتب باللغة العربية والفارسية. و**البيروني** أول من قال أن الأرض تدور حول محورها، وكان أول من أشار إلى وجود الجاذبية بين الأجسام قبل أن يكتشفها (نيوتن) حيث قال: «إن الأجسام تسقط على الأرض بسبب قوى الجذب المتمركزة فيها».

من أشهر مؤلفاته : (الآثار الباقية عن القرون الخالية) و(تحقيق ما للهند من مقولة مقبولة في العقل أو مرذولة) و(القانون المسعودي) و(كتاب الصيدلة) و(التفهيم لأوائل صناعة التنجيم). وأوضح بالطريق الهندسي الحدود النسبية بين القمر والشمس، والتي عليها تعتمد ظروف رؤية الهلال ما لم تتدخل العوامل الجوية، وأوضح الفرق بين النجوم (الكواكب الثابتة) والكواكب السيارة، وقام بقياس طول السنة على وجه دقيق، ودرس كسوف الشمس وخسوف القمر والفرق بينهما. وعلاوة على ذلك فإن **للبيروني** جهوداً علمية في الترجمة، فقد ترجم اثنين وعشرين كتاباً من التراث العلمي الهندي إلى اللغة العربية، كما ترجم بعض المؤلفات الرياضية من التراث الإغريقي إلى العربية.

بحوثه العلمية : **للبيروني** أبحاث جديدة في علم الفلك والفيزياء والرياضيات والتعدين والصيدلة والجغرافيا، والجيولوجيا. ففي مجال التعدين ابتكر جهازاً يستخدم في قياس الوزن النوعي للفلزات والأحجار، ويعد أقدم مقياس لكثافة المعادن. وسبق في علم الجيولوجيا إلى القول بنظريات رائدة في تكوين القشرة الأرضية وما طرأ على اليابسة والماء من تطورات خلال الأزمنة الجيولوجية. وكتب في الصيدلة موسوعة علمية ترشد الصيدلي إلى جميع الأدوية واختيار الأجود منها وتحضير عدد من المركبات الكيمائية، واستخدام الأجهزة في عمليات التقطير والترشيح وغيرها. أما كتابه في مجال الاجتماع والحضارة **(تحقيق ما للهند من مقولة مقبولة في العقل أو مرذولة)** فهو من أهم الكتب التي تعد مرجعاً لكل دارس للثقافة الهندية، وما للهنود من عادات وتقاليد ومعتقدات وشرائع وفلسفة وأدب وتاريخ. أما في الرياضيات فهو من الذين بحثوا في تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية، وكان ملماً بحساب المثلثات، وكتبه فيها تدل على أنه عرف قانون تناسب الجيوب، وقد عمل جداول رياضية للجيب والظل. ووضع نظرية لحساب محيط الأرض لا تزال تعرف باسمه حتى الآن في الكتب المدرسية. وابتكر **البيروني** الإسطرلاب الأسطواني الذي لم يقتصر على رصد الكواكب والنجوم فقط، بل استُخدم أيضًا في تحديد أبعاد الأجسام البعيدة عن سطح الأرض وارتفاعها. كما اخترع جهازًا خاصًا يبين أوقات الصلاة بكل دقة وإتقان. ولم يكُفَّ هذا العالم لحظة عن البحث والدرس، وأثمرت هذه الحياة العلمية الجادة عما يزيد عن مائة وعشرين مؤلفاً، نقل بعضها إلى الإنجليزية والفرنسية والألمانية واللاتينية، وأخذ عنها الغربيون، واستفادوا منها.

وفاته: ظل **البيروني** حتى آخر حياته شغوفاً بالعلم مقبلاً عليه، متفانياً في طلبه. وكانت وفاته في مدينة **غزنة** سنة ١٠٤٨م.

عند دراسة الفصل الأول (مبدأ العد والتباديل والتوافيق) وفي نهاية الساعة الدراسية المخصصة لكل مفردة من المنهج يتوقع من المتعلم أن :

١- يحسب عدد الطرق الممكنة لإجراء العمليات المتنوعة إستناداً إلى مبدأ العد بدقة .

٢- يبين مفهوم مضروب العدد باستخدام الرموز الرياضية .

٣- يبين مفهوم التباديل باستخدام الرموز الرياضية .

٤- يبين مفهوم التوافيق باستخدام الرموز الرياضية.

٥- يطبق خواص مضروب العدد في حل المسائل بسهولة .

٦- يطبق خواص التباديل في حل المسائل بسهولة .

٧- يطبق خواص التوافيق في حل المسائل بسهولة .

٨- يميز بين التباديل والتوافيق من خلال المسألة بسهولة.

٩- يطبق قانون مضروب العدد بدقة في حل المسألة.

١٠- يحل سؤالاً لفظياً باستخدام قانون التباديل بدقة.

١١- يحل سؤالاً لفظياً باستخدام قانون التوفيق بدقة.

الفصل الأول

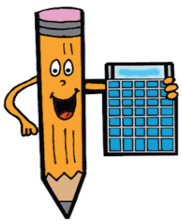
مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق

قَالَ تَعَالَى: ﴿ وَجَعَلْنَا ٱلَّيْلَ وَٱلنَّهَارَ ءَايَتَيْنِ ۖ فَمَحَوْنَآ ءَايَةَ ٱلَّيْلِ وَجَعَلْنَآ ءَايَةَ ٱلنَّهَارِ مُبْصِرَةً لِّتَبْتَغُوا۟
فَضْلًا مِّن رَّبِّكُمْ وَلِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ وَكُلَّ شَىْءٍ فَصَّلْنَٰهُ تَفْصِيلًا ﴿١٢﴾ ﴾ الإسراء.

أن معرفة الحساب مطلب من المطالب المهمة التي يحتاجها الإنسان لتصريف شؤونه وأموره. وكذلك فإن من الأهداف الرئيسية لدراسة علم الرياضيات أن يتعلم الدارس العدَّ وطرائقه وأساليبه التي تقلل من العمليات في سبيل الحصول على النتائج بوقت قياسي. وسوف نتناول في هذا الفصل بعض هذه الوسائل والطرائق، مثل مضروب (مفكوك) العدد، والتباديل والتوافيق.

(١-١) مبدأ العدّ:

إذا كان لدينا ك من العمليات وأجريت العملية الأولى بعدد ($ن_١$) من الطرق المختلفة، ثم تلتها عملية ثانية بعدد ($ن_٢$) من الطرق المختلفة، ثم ثالثة بعدد ($ن_٣$) من الطرق المختلفة، .... وهكذا، فإن عدد الطرق الكلية التي يمكن إجراء هذه العمليات بها، هو:



$$ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times \dots \times ن_ك \quad \text{حيث} \quad ك \in ص^+$$

مثال١ : لدى معرض بيع المولدات الكهربائية خمسة أنواع من المولدات، ومن كل نوع ثلاثة أحجام، ومن كل حجم يوجد عشر مولدات، فكم مولدة في المعرض؟

الحل: عدد المولدات في المعرض = ٥ × ٣ × ١٠ = ١٥٠ مولدة

مثال٢ : ما عدد البدلات الرجالية المعروضة في محل تجاري يضم (٦) تصاميم مختلفة من البدلات، ومن كل تصميم (٧) ألوان، ومن كل لون (٥) قياسات مختلفة؟

الحل: عدد البدلات في المحل = ٦ × ٧ × ٥ = ٢١٠ بدلة

مثال٣ : كم كلمة مؤلفة من حرفين يمكن كتابتها من الأحرف { أ ، ب ، ج ، د } إذا كان تكرار الحرف: أ- مسموحاً به ؟ ب- غير مسموح به ؟

الحل: أ- إذا كان التكرار مسموحاً به:

طرق اختيار الحرف الأول = ٤

طرق اختيار الحرف الثاني = ٤

عدد الاختيارات الكلية = ٤ × ٤ = ١٦ كلمة

ب- إذا كان التكرار غير مسموح به:

طرق اختيار الحرف الأول = ٤

طرق اختيار الحرف الثاني = ٣

عدد الاختيارات الكلية = ٤ × ٣ = ١٢ كلمة

مثال٤ : كم عدداً مكوناً من ثلاث مراتب وأقل من (٦٠٠) يمكن تكوينه من الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} إذا كان:

أ- التكرار مسموحاً به؟ ب- التكرار غير مسموح به؟

الحل: أ- إذا كان التكرار مسموحاً به:

طرق اختيار مرتبة المئات = ٤

طرق اختيار مرتبة العشرات = ٦

طرق اختيار مرتبة الآحاد = ٦

∴ عدد الاختيارات الكلية = ٤ × ٦ × ٦ = ١٤٤ عدداً

ب- إذا كان التكرار غير مسموح به:

طرق اختيار مرتبة المئات = ٤

طرق اختيار مرتبة العشرات = ٥

طرق اختيار مرتبة الآحاد = ٤

∴ عدد الاختيارات الكلية = ٤ × ٥ × ٤ = ٨٠ عدداً

مثال٥ : وعاء يحتوي على (٦) قطع مرقمة من (١) إلى (٦)، يراد سحب (٤) منها، فما عدد الاختيارات الكلية للسحب:

أ- في حالة الإرجاع ؟ **ب- بدون إرجاع ؟**

الحل: أ- في حالة الإرجاع:

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الأولى = ٦

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الثانية = ٦

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الثالثة = ٦

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الرابعة = ٦

∴ عدد الطرق الكلية لسحب الكرات = ٦ × ٦ × ٦ × ٦ = ١٢٩٦ طريقة

ب- بدون إرجاع:

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الأولى = ٦

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الثانية = ٥

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الثالثة = ٤

عدد الطرق الممكنة لسحب القطعة الرابعة = ٣

∴ عدد الاختيارات الكلية لسحب الكرات = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ طريقة

مثال٦ : كم عدداً مكوناً من أربع مراتب مختلفة وأكبر من (٤٠٠٠) وأقل من (٦٠٠٠) يمكن تكوينه من الأرقام الآتية: {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} ؟

الحل: ∵ العدد أكبر من (٤٠٠٠)، لذا فإننا سنستبعد عند اختيار مرتبة الألوف الأرقام (١ ، ٢ ، ٣)، ولأن العدد أصغر من (٦٠٠٠)، لذا فإننا سنستبعد عند اختيار مرتبة الألوف الأرقام (٦ ، ٧).

طرق اختيار مرتبة الألوف = ٢

طرق اختيار مرتبة المئات = ٦

طرق اختيار مرتبة العشرات = ٥ [لأن كلمة <u>مختلفة</u> تعني أن التكرار غير مسموح به]

طرق اختيار مرتبة الآحاد = ٤

∴ عدد الطرق الكلية = ٢ × ٦ × ٥ × ٤ = ٢٤٠ عدداً

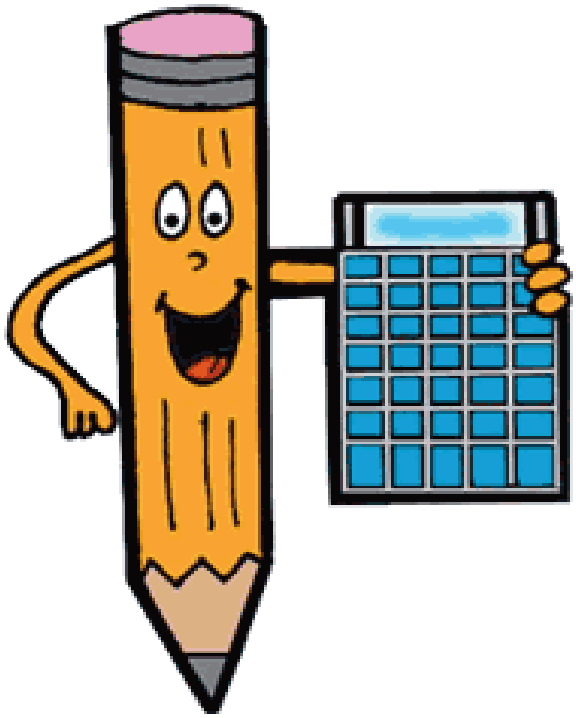
مثال٧ : وعاء يحتوي على (٨) بطاقات مرقمة من (١) إلى (٨)، سحبت منه بطاقة، ثم ثانية وضعت على يمين الأولى، ثم الثالثة وضعت يمين الثانية، فتكون عدد مؤلف من ثلاثة أرقام. فكم عدداً نحصل عليه بهذه الطريقة؟

الحل: عدد الطرق الممكنة لسحب البطاقة الأولى = ٨

عدد الطرق الممكنة لسحب البطاقة الثانية = ٧

عدد الطرق الممكنة لسحب البطاقة الثالثة = ٦

عدد الاختيارات الكلية = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦ عدداً



(١-٢) مضروب (مفكوك) العدد:

هو حاصل ضرب العدد في جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه، أي أنه ناتج ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي تبدأ بالعدد نفسه وتتناقص حتى تصل العدد (١).
ويرمز له بالرمز (!) أو (⌊). أي أن لكل عدد طبيعي ن ، فإن مضروب العدد ن هو:

$$ن! = \begin{cases} ن(ن-١)(ن-٢)\times \ldots \times ١ & \forall\ ن \neq صفر \\ ١ & \forall\ ن = صفر \end{cases}$$

مثال١ : $٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

مثال٢ : جد ناتج كل ممّا يأتي:

أ) $٥! + ٣!$ ، ب) $\dfrac{١٥!}{١٢!}$ ، ج) $\dfrac{٦! \times ٥!}{٦! - ٥!}$

الحل:

أ) $٥! + ٣! = (٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١) + (٣ \times ٢ \times ١) = ١٢٠ + ٦ = ١٢٦$

ب) $\dfrac{١٥!}{١٢!} = \dfrac{١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times \cancel{١٢!}}{\cancel{١٢!}} = ١٥ \times ١٤ \times ١٣ = ٢٧٣٠$

[لاحظ أنه يمكننا تجزئة مفكوك العدد لتسهيل العدّ حسب تعريف مفكوك العدد:

$ن! = ن(ن-١)!$ أي أن:

$١٥! = ١٥ \times ١٤! = ١٥ \times ١٤ \times ١٣! = ١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢!$ كما في هذا المثال]

ج) $\dfrac{٦! \times ٥!}{٦! - ٥!} = \dfrac{٦! \times ٥!}{٦ \times ٥! - ٥!} = \dfrac{٦! \times \cancel{٥!}}{\cancel{٥!}(٦-١)} = \dfrac{٦ \times \cancel{٥} \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{\cancel{٥}} = ١٤٤$

مثال٣ : جد قيمة ن في المعادلة الآتية: ٤ ! + ن = ١٦ ن – ٣ !

الحل: (٤ × ٣ × ٢ × ١) + ن = ١٦ ن – (٣ × ٢ × ١)

٢٤ + ن = ١٦ ن – ٦

١٦ ن – ن = ٢٤ + ٦

١٥ ن = ٣٠

∴ ن = ٢

مثال٤ : إذا كان ن = ٤ أثبت أن: $\frac{\text{(ن + ٣) !}}{\text{(٢ن – ١) !}} = ١$

الحل: $\frac{\text{(ن + ٣) !}}{\text{(٢ن – ١) !}} = \frac{\text{(٤ + ٣) !}}{\text{(٢×٤ – ١) !}} = \frac{\cancel{\text{٧ !}}}{\cancel{\text{٧ !}}} = ١$

ملاحظة: إذا كان ن! = ر! فإن ن = ر **بشرط** ر ≠ ٠ ، ر ≠ ١

مثال٥ : جد قيمة ن إذا علمت أن:

أ) ن ! = ٤٠٣٢٠ ، ب) (ن – ٣) ! = ٢٤

الحل: أ) لكي نعرف قيمة ن نقوم بتحليل العدد (٤٠٣٢٠) الذي يمثل ناتج المضروب، ويكون التحليل إلى عوامله تصاعدياً (أي ١ ثم ٢ ثم ٣ ثم ٤ ... وهكذا).

ن ! = ١ × ٢ × ٣ ×٤ × ٥ × ٦ × ٧ × ٨

∴ ن ! = ٨ !

∴ ن = ٨

١	٤٠٣٢٠
٢	٤٠٣٢٠
٣	٢٠١٦٠
٤	٦٧٢٠
٥	١٦٨٠
٦	٣٣٦
٧	٥٦
٨	٨
	١

ب) (ن −٣) ! = ٢٤

لحل هذا النوع من الأسئلة أيضاً نحلل الرقم (٢٤) تصاعدياً وكالآتي:

(ن − ٣) ! = ١ × ٢ × ٣ × ٤

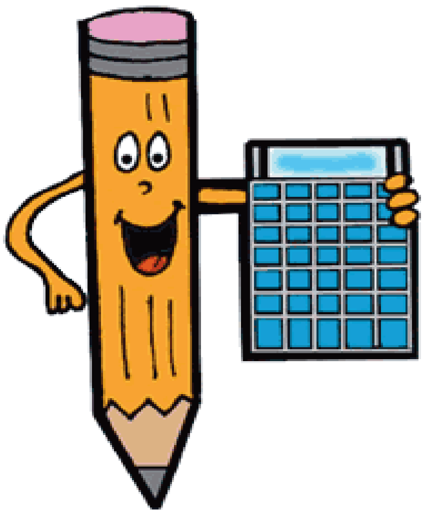
(ن − ٣) ! = ٤ !

ن − ٣ = ٤

ن = ٤ + ٣

∴ ن = ٧

٢٤	١
٢٤	٢
١٢	٣
٤	٤
١	



(١-٣) التباديل:

وهو عبارة عن عدد الاختيارات الممكنة لمجموعة من العناصر (الأشياء) مع الأخذ بنظر الاعتبار الترتيب. ويرمز له بالرمز **ل (ن ، ر)** . وتقرأ تباديل ن مأخوذة منها ر.

فإذا كان كل من ن ، ر ∋ ط ، ر ≤ ن فإن:

$$ل\,(ن ، ر) = ن(ن-١)(ن-٢) \times \ldots \times (ن - ر+١) \qquad \forall \; ر \leq ن$$

وكذلك فإن:

$$ل\,(ن ، ر) = \begin{cases} ن! & \forall \; ر = ن \\ ن & \forall \; ر = ١ \\ ١ & \forall \; ر = صفر \end{cases}$$

ويمكن التعبير عن التباديل بالصيغة الآتية:

$$ل\,(ن ، ر) = \frac{ن\,!}{(ن - ر)!}$$

مثال١ : ل (٦ ، ٤) = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠

طريقة ثانية:

$$ل\,(٦ ، ٤) = \frac{٦!}{(٦-٤)!} = \frac{٦\times٥\times٤\times٣\times\cancel{٢!}}{\cancel{٢!}} = ٣٦٠$$

مثال٢ : إذا كان ل (ن ، ٤) = ٨ ل (ن ، ٣) فما قيمة ن؟

الحل: ~~ن~~ ~~(ن−١)~~ ~~(ن−٢)~~ (ن−٣) = ٨ ~~ن~~ ~~(ن−١)~~ ~~(ن−٢)~~

ن − ٣ = ٨

∴ ن = ١١

مثال٣ : جد ناتج ما يأتي:

ل (٧ ، ٦)
ـــــــــــ
ل (٦ ، ٥)

الحل:

ل (٧ ، ٦) / ل (٦ ، ٥) = ٧ × ~~٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢~~ / ~~٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢~~ = ٧

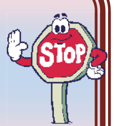
مثال٤ : أثبت أن: ل (١٠ ، ٤) = ٦ ل (٧ ، ٤)

الحل:

الطرف الأيمن= ل (١٠ ، ٤) = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤٠

الطرف الأيسر= ٦ ل (٧ ، ٤) = ٦ × (٧ × ٦ × ٥ × ٤) = ٥٠٤٠

∴ ل (١٠ ، ٤) = ٦ ل (٧ ، ٤)



ملاحظة: إذا كان ل (ن ، ر) = ل (ن ، ف) فإن: ر = ف بشرط ن ≠ ١

مثال : إذا كان ل (٦ ، ٣) = ل (٦ ، ر) فإن ر = ٣

(١-٤) التوافيق:

وهو عبارة عن عدد الاختيارات الممكنة لمجموعة من العناصر (الأشياء) دون أخذ الترتيب بنظر الاعتبار. ويرمز له بالرمز ق(ن ، ر) ، أو $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ وتقرأ توافيق **ن** مأخوذة منها ر.

فإذا كان كل من ن ، ر $\in$ ط ، ر $\le$ ن فإن:

$$\text{ق}(\text{ن} \text{ ، } \text{ر}) = \frac{\text{ل}(\text{ن} \text{ ، } \text{ر})}{\text{ر}\,!} \qquad \forall\ \text{ر} \le \text{ن}$$

وكذلك ففي حالات خاصة يكون:

$$\text{ق}(\text{ن} \text{ ، } \text{ر}) = \begin{cases} ١ & \forall\ \text{ر} = \text{ن} \\ ١ & \forall\ \text{ر} = \text{صفر} \\ \text{ن} & \forall\ \text{ر} = ١ \end{cases}$$

مثال ١ : جد كلاً من:

أ) ق (٩ ، ٣) ، ب) ق (٥ ، ١) ، ج) ق (٢ ، ٢) ، د) ق (٧ ، ٠)

الحل:

أ) $\text{ق}(٩ \text{ ، } ٣) = \frac{\text{ل}(٩ \text{ ، } ٣)}{٣\,!} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧}{٣ \times ٢ \times ١} = ٨٤$

ب) ق (٥ ، ١) = ٥

ج) ق (٢ ، ٢) = ١

د) ق (٧ ، ٠) = ١

[من الخواص]

مثال٢ : إذا كان $ق(ن ، ٢) = ١٥$ **فما قيمة ن؟**

الحل:

$$\frac{ل(ن ، ٢)}{٢!} = ١٥$$

$$\frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} = ١٥$$

$$ن^٢ - ن = ٣٠$$

$$ن^٢ - ن - ٣٠ = ٠$$

$$(ن + ٥)(ن - ٦) = ٠$$

أما $ن + ٥ = ٠ \Leftarrow ن = -٥$ (يهمل لأن $-٥ \not\ni ط$)

أو $ن - ٦ = ٠ \Leftarrow ن = ٦$

$\therefore ن = ٦$

مثال٣ : جد قيمة ن إذا علمت أن: $ق(ن+١ ، ٣) = ٢ق(ن ، ٢)$.

الحل:

$$\frac{ل(ن+١ ، ٣)}{٣!} = \frac{٢ ل(ن ، ٢)}{٢!}$$

$$\frac{(ن+١)(ن+١-١)(ن+١-٢)}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٢ ن(ن-١)}{٢ \times ١}$$

$$\frac{(ن+١) ن (ن-١)}{٦} = \frac{٢ ن(ن-١)}{٢}$$

$$\frac{(ن+١)}{٦} = ١$$

$$ن + ١ = ٦$$

$\therefore ن = ٥$

مثال٤ : إذا كان ق (ن ، ٤) = ٣ ل (ن ، ٢) فما قيمة ن؟

الحل:

ل (ن ، ٤) / ٤ ! = ٣ ل (ن ، ٢)

ن (ن−١) (ن−٢) (ن−٣) / (٤ × ٣ × ٢ × ١) = ٣ ن (ن −١)

(ن−٢) (ن−٣) = ٢٤ × ٣

ن^{٢} − ٥ ن + ٦ = ٧٢

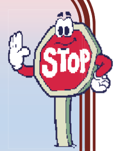
ن^{٢} − ٥ ن − ٦٦ = ٠

(ن + ٦) (ن − ١١) = ٠

أما ن + ٦ = ٠ ⇦ ن = − ٦ (يهمل)

أو ن − ١١ = ٠ ⇦ ن = ١١

∴ ن = ١١



ملاحظة: إذا كان ق (ن ، ر) = ق (ن ، ف) ، ر ≠ ف فإن:

ن = ر + ف

أي أن: ق (ن ، ر) = ق (ن ، ن− ر)

مثال٥ : إذا كان ق (ن ، ٧) = ق (ن ، ٢) فإن ن = ٧ + ٢ = ٩

مثال٦ : جد ناتج ما يأتي: ٠ ! − ٤ ل (١٤ ، ٠) + ١٠ ق (٥ ، ٥) − ل (٢ ، ٢)

الحل: ٠ ! − ٤ ل (١٤ ، ٠) + ١٠ ق (٥ ، ٥) − ل (٢ ، ٢)

= ١ − ٤ × ١ + ١٠ × ١ − ٢ × ١

= ١ − ٤ + ١٠ − ٢

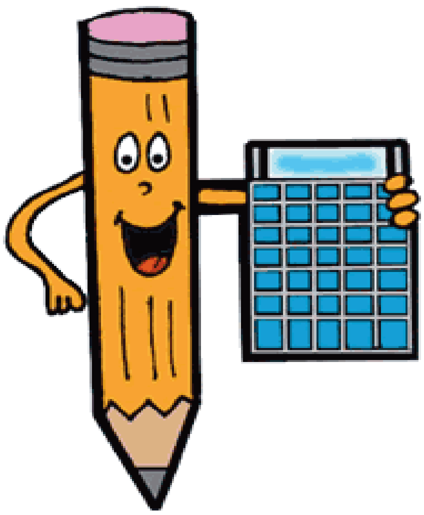
= ٥

مثال٧ : جد ناتج ما يأتي: ق (١٠٠ ، ٩٨)

الحل: ∵ ق (ن ، ر) = ق (ن ، ن− ر)

∴ ق (١٠٠ ، ٩٨) = ق (١٠٠ ، ٢)

$$= \frac{\text{ل}\,(١٠٠ ، ٢)}{٢\,!} = \frac{\overset{٥٠}{\cancel{١٠٠}} \times ٩٩}{\underset{١}{\cancel{٢}} \times ١} = ٤٩٥٠$$



تمارين (١-١)

١) جد بصورة مباشرة:

أ) $٠! + ٣!$ ب) $\text{ل}(٩ ، ٠)$ ج) $\text{ق}(٤ ، ٠)$ د) $\text{ق}(٢٦ ، ٢٦)$

٢) جد ناتج كل مما يأتي:

أ) $\dfrac{٦}{٥!} - \dfrac{٤!}{٥!}$ ب) $\dfrac{٤! + ٣!}{٤! - ٣!}$ ج) $\dfrac{٧!}{(٧ - ٣)!}$ د) $٥! - ٢!$

٣) جد قيمة ن لكلٍ مما يأتي:

١) $\text{ن}! = ٢٤$ ٢) $\text{ن}! = ١٢٠$ ٣) $\text{ن}! = ٧٢٠$

٤) $(\text{ن} - ١)! = ٦$ ٥) $(\text{ن} - ٥)! = ٢٤$ ٦) $(\text{ن} + ٢)! = ٥٠٤٠$

٧) $\dfrac{\text{ن}!}{(\text{ن} + ١)!} = \dfrac{١}{٥}$ ٨) $\dfrac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ٢)!} = ٢٠$ ٩) $\dfrac{(\text{ن} + ١)!}{(\text{ن} - ١)!} = ٥٦$

٤) إذا كان ن = ٨ أثبت أن: $\dfrac{(\text{ن} + ١)!}{(\text{ن} - ١)!} = ٧٢$

٥) جد ناتج كل مما يأتي:

١) $\dfrac{\text{ل}(٥ ، ٣)}{\text{ل}(٤ ، ١)}$

٢) $\dfrac{١}{٢١٠}\,[\text{ل}(٧ ، ٤) + \text{ل}(٧ ، ٣)]$

٦) جد قيمة ن لكلٍ مما يأتي:

أ) ل (ن ، ٦) = ١٢ ل (ن ، ٤)

ب) ٤ل (ن−٣ ، ٢) = ٣ ل (ن−٢ ، ٢)

ج) ق (ن+٢ ، ٤) = ق (ن ، ٢)

د) ق (ن+١ ، ٢) = ل (ن ، ٣)

هـ) ل (ن+١ ، ٣) = ٢٤ ن

و) $\frac{\text{٢ق (ن ، ٣)}}{\text{ل (ن ، ٢)}}$ = ٤

ز) $\frac{\text{ل (ن+١ ، ٤)}}{\text{ل (٣ ، ٢)}}$ = ٢ ل (ن−١ ، ٢)

ح) $\frac{\text{ل (ن ، ٤)}}{\text{ل (ن−١ ، ٤)}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

ط) ٣ ق (ن ، ٤) = ١٤ ق (ن ، ٢)

ي) ل (ن ، ٣) = ٤٢ (ن − ٢)

ك) ق (ن ، ٧) = ق (ن ، ٣)

٧) ما قيمة ن إذا كان:

أ) ل(ن ، ٢) = ٩٠ ؟

ب) ق(ن ، ٢) = ٢١ ؟

ج) ق (ن ، ٢) = ٢٨ ؟

(١–٥) تطبيقات على مفكوك العدد والتباديل والتوافيق:

١– تطبيقات على مفكوك العدد:

مثال١: بكم طريقة يمكن أن يقف (٦) أشخاص على خط مستقيم؟

الحل: ٦ ! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة

مثال٢: مجموعة مكونة من (١٠) أشخاص يراد توزيعهم على (١٠) وظائف. جد عدد طرق التوزيع؟

الحل: ١٠ ! = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٣٦٢٨٨٠٠ طريقة

مثال٣: فريق كرة قدم مؤلف من (١١) لاعباً، بكم طريقة يمكن للفريق أن يلعب بالترتيب المختلف؟

الحل:

١١ ! = ١١ × ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٣٩٩١٦٨٠٠ طريقة

٢– تطبيقات على التباديل:

مثال١: إذا كانت المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } ، فكم عدداً مكوناً من أربع مراتب مختلفة يمكن تكوينه من أرقام المجموعة س؟

الحل: ل (٩ ، ٤) = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ٣٠٢٤ طريقة

مثال٢: يراد انتخاب لجنة مؤلفة من ثلاثة أعضاء (الرئيس، نائب الرئيس، المسؤول المالي) من بين (٢٠٠) مشارك في الانتخاب. فما هو عدد الطرق المناسبة لاختيار أعضاء اللجنة؟

الحل: ل (٢٠٠ ، ٣) = ٢٠٠ × ١٩٩ × ١٩٨ = ٧٨٨٠٤٠٠ طريقة

مثال٣: كم كلمة مؤلفة من ثلاثة حروف يمكن تكوينها من الحروف { أ ، ب ، ج ، د ، و ، س }؟

الحل: ل (٦ ، ٣) = ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠ كلمة

مثال٤: لتكن أ = {١ ، ٢ ، ٣} . كم تطبيقاً متقابلاً يمكن تكوينه من المجموعة (أ) إلى المجموعة (أ) نفسها؟

الحل: ل (٣ ، ٣) = ٣ ! = ٣ × ٢ × ١ = ٦ تطبيقاً متقابلاً

مثال٥ : كم تطبيقاً متبايناً من هـ إلى ع يمكن تكوينه إذا كانت: هـ = { ٢ ، ٤ } ، ع = { أ ، ب ، ج }؟

الحل: ل (٣ ، ٢) = ٣ × ٢ = ٦ تطبيقاً متبايناً

٣- تطبيقات على التوافيق:

مثال١: كم مربعاً يمكن تكوينه من (١٠) نقاط أي ثلاث منها ليست على استقامة واحدة؟

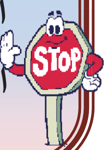
الحل: ق (١٠ ، ٤) = $\frac{\text{ل (١٠ ، ٤)}}{\text{٤ !}}$ = $\frac{\text{١٠ × ٩ × ٨ × ٧}}{\text{٤ × ٣ × ٢ × ١}}$ = ٢١٠ طريقة

مثال٢: إذا احتوت ورقة الأسئلة على (٦) أسئلة، والمطلوب الإجابة على (٥) أسئلة فقط. فما عدد طرق الإجابة؟

الحل: ق (٦ ، ٥) = $\frac{\text{ل (٦ ، ٥)}}{\text{٥ !}}$ = $\frac{\text{٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢}}{\text{٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١}}$ = ٦ طرق

مثال٣: للقيام بمراسيم رفع العلم العراقي يتم اختيار(٣) طلاب من بين (٢٠) طالباً، جد عدد طرق الاختيار.

الحل: ق (٢٠ ، ٣) = $\frac{\text{ل (٢٠ ، ٣)}}{\text{٣ !}}$ = $\frac{\text{٢٠ × ١٩ × ١٨}}{\text{٣ × ٢ × ١}}$ = ١١٤٠ طريقة



ملاحظة:

إذا ذكر صنفان (أو أكثر) من الأشياء، وطلب اختيار مجموعة منهما تضم كلا الصنفين (كل الأصناف) بأعداد محددة، فيتم إيجاد التوافيق لكل منها ثم ضرب تلك النواتج.

مثال١: بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من (٣) طالبات وأربعة طلاب من بين (٥) طالبات و(٧) طلاب؟

الحل: ق (٥ ، ٣) = $\frac{\text{ل}(٥ ، ٣)}{٣!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠$ طرق لاختيار الطالبات

ق (٧ ، ٤) = $\frac{\text{ل}(٧ ، ٤)}{٤!} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$ طريقة لاختيار الطلاب

عدد الطرق الكلية = ١٠ × ٣٥ = ٣٥٠ طريقة

مثال٢: بكم طريقة يمكن اختيار وفد مكون من (٦) أشخاص لتمثيل مؤسسة في مؤتمرٍ ما، من مجموع (٧) رجال و(٥) نساء بشرط:

أ) أن يتضمن الوفد امرأتين؟ ب) أن يكون أعضاء الوفد جميعهم من الرجال؟

الحل: أ) عدد أفراد الوفد هم ٦، فإذا اشترط أن يكون ٢ منهم نساء فإن عدد الرجال سيكون ٤

∴ طرق اختيار المرأتين من أصل خمسة في المؤسسة ستكون:

ق (٥ ، ٢) = $\frac{\text{ل}(٥ ، ٢)}{٢!} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} = ١٠$ طرق

وطرق اختيار الرجال الأربعة من أصل سبعة رجال في المؤسسة ستكون:

ق (٧ ، ٤) = $\frac{\text{ل}(٧ ، ٤)}{٤!} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$ طريقة

∴ عدد الطرق الكلية لاختيار الوفد = ق(٥ ، ٢) × ق(٧ ، ٤)

= ١٠ × ٣٥ = ٣٥٠ طريقة

ب) عندما يكون أعضاء الوفد جميعهم من الرجال، فهذا يعني أن عدد النساء (صفر). لذا فإن طرق اختيار الوفد المؤلف من (٦) رجال من أصل سبعة رجال في المؤسسة ستكون:

ق (٧ ، ٦) × ق(٥ ، ٠) = ق (٧ ، ١) × ق(٥ ، ٠) **[لماذا؟]**

= ٧ × ١

= ٧ طرق

مثال٣ : لدى شخص (٤) سترات، و(٥) بنطلونات، و(٨) قمصان، فبكم طريقة يمكن أن يظهر هذا الشخص وهو يرتدي سترة وبنطلون وقميص؟

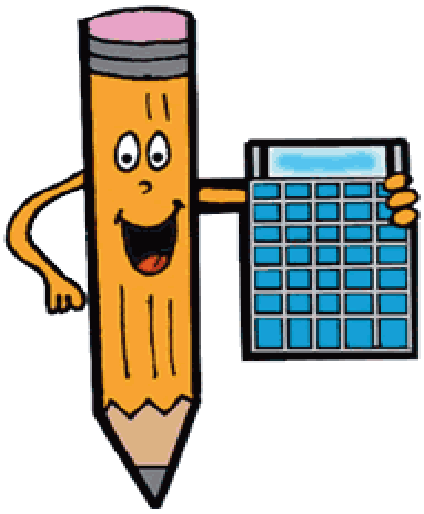
الحل: عدد اختياراته لارتداء السترة = ق(٤ ، ١) = ٤

عدد اختياراته لارتداء البنطلون = ق(٥ ، ١) = ٥

عدد اختياراته لارتداء القميص = ق(٨ ، ١) = ٨

[من الخواص]

∴ عدد الطرق الكلية لظهور الرجل = ٤ × ٥ × ٨ = ١٦٠ طريقة



تمارين (١-٢)

١) بكم طريقة يمكن لسبعة اشخاص الجلوس على (٧) كراسي مرتبة باستقامة واحدة ؟

٢) مجلس إدارة إحدى الشركات مكون من (١٠) أعضاء. بكم طريقة يمكن اختيار (٣) منهم ليشغلوا المناصب (الرئيس ، النائب الأول للرئيس ، النائب الثاني للرئيس)؟

٣) مجموعتان: (أ) تضم (٨) لاعبين، (ب) تضم (٦) لاعبين، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من (٣) لاعبين من (أ) ولاعبين من (ب)؟

٤) كم مثلثاً يمكن رسمه من مجموع (١٢) نقطة أي ثلاث منها ليست على استقامة واحدة؟

٥) كم مجموعة ثنائية يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها (٧)؟

٦) كم تطبيقاً متبايناً من **س** إلى **ص** يمكن تكوينه إذا كانت: **س**={٢ ، ١} ، **ص**={م، ن،هـ}؟

٧) كم عدداً مكوناً من (٣) مراتب وأصغر من (٧٠٠) يمكن تكوينه من الأرقام {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} إذا كان: أ) التكرار مسموحاً به؟

ب) التكرار غير مسموح به؟

٨) كم عدداً مكوناً من (٤) مراتب وأكبر من (٤٠٠٠) يمكن تكوينه من الأرقام { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } إذا كان التكرار مسموحاً به؟

٩) كيس يحتوي على (١٠) قطع مرقمة من (١) إلى (١٠)، يراد سحب (٤) منها. كم سيكون عدد الاختيارات الكلية للسحب مع الإرجاع؟

١٠) وعاء يحتوي على (١٥) كرة مرقمة (١ ، ٢ ، ... ، ١٥)، فإذا أردنا سحب(٣) كرات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاعها، فكم طريقة يمكن أن تتم بها هذه العملية؟

١١) كم كلمة مؤلفة من ثلاثة حروف مختلفة يمكن تكوينها من حروف كلمة (العراقي)؟

١٢) ورقة أسئلة مادة الرياضيات تتضمن (١٠) أسئلة، فبكم طريقة يمكن للطالب الإجابة إذا كان المطلوب:

أ) الإجابة على (٨) أسئلة فقط؟

ب) الإجابة على (٨) أسئلة فقط، بشرط أن تكون الأسئلة الثلاثة الأولى من ضمنها؟

١٣) كم عدداً مكوناً من (٣) مراتب وأكبر من (٤٠٠) وأصغر من (٨٠٠) يمكن تكوينه من الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} إذا سمح بتكرار الأرقام ، وإذا لم يسمح ؟

١٤) شهد مؤتمر إسلامي حضوراً لـ(٣٥) دولة إسلامية، وكل دولة مثلتها (٤) لجان، وضمت كل لجنة (١٠) مشاركين. فكم مشاركاً حضر المؤتمر؟

رياضيات مسلية

قَالَ تَعَالَىٰ: ﴿لَيْلَةُ ٱلْقَدْرِ خَيْرٌ مِّنْ أَلْفِ شَهْرٍ ٣﴾

القدر

- ما عدد السنوات التي تعادل ليلة القدر؟
- ما عدد الأيام التي تعادل ليلة القدر؟

عند دراسة الفصل الثاني (الغاية) وفي نهاية الساعة الدراسية المخصصة لكل مفردة من المنهج يتوقع من المتعلم أن :

١. يبين مفهوم (غاية الدالة) عند عدد معين بوضوح .
٢. يجد غاية الدالة عند عدد معين بطريقة التعويض المباشر بدقة .
٣. يجد غاية الدالة عند عدد معين بطريقة التحليل بدقة .
٤. يحدد الطريقة المناسبة لإيجاد غاية الدالة عند عدد معين بسهولة .
٥. يجد غاية الدوال المجزئة عند عدد معين بالطريقة المناسبة لكل دالة.
٦. يجد قيمة مجهول في دالة علمت غايتها عند عدد معين بالطريقة المناسبة لكل دالة .

الفصل الثاني

الغايــــــــة

(٢-١) مقدمة:

سبق وأن درسنا مفهوم الدالة وكيفية إيجاد قيم الدالة عند أي عنصر ينتمي إلى مجالها، وتعيين أوسع مجال للدالة الحقيقية.

ومن المفيد أن نذكر بعض الصيغ غير المعرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) مثل:

١) $\frac{\text{أ}}{\text{صفر}} \not\ni$ ح $\forall$ أ $\ni$ ح أي أن $\frac{\text{أ}}{\text{صفر}}$ غير معرف في ح.

مثل: $\frac{١}{\text{صفر}}$ ، $\frac{-٥}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، ... كل منها غير معرّف في ح.

أي أن القسمة على صفر كمية غير معروفة.

٢) $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \not\ni$ ح لكل أ $\ni$ ص$^{-}$ ، ن عدد زوجي موجب.

مثل: $\sqrt{-٩}$ ، $\sqrt[٤]{-٢}$ ، $\sqrt[٦]{-٢٤}$ كل منها غير معرّف في ح .

إن مفهوم الغاية من المفاهيم الأساسية في الرياضيات إذ يعتمد عليه كثير من المفاهيم المهمة الأخرى مثل الاشتقاق والتكامل، وسوف نتناول فكرة الغاية بطريقة مبسطة، وسيكون اهتمامنا بصفة خاصة بالقواعد والنظريات التي تسهل عملية إيجاد الغاية للدوال عند نقطة معينة.

فإذا كانت د(س) دالة، فيرمز لغاية الدالة عندما س تقترب من العدد (أ) بالرمز: $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{غـــا}}$ **د(س)**.

وعندما نقول إن س تقترب من أ نعني س تقترب كثيراً جداً (إلى حد كبير) وإن س ≠ أ.

(٢-٢) طرق إيجاد الغاية:

هناك عدة طرق لإيجاد غاية الدالة عند نقطة معينة، نذكر منها:

١- طريقة التعويض المباشر:

ونعني بها التعويض عن قيمة س (مجهول الدالة) بالعدد الحقيقي الذي تقترب منه. بمعنى أن غاية الدالة عندما س تقترب من عدد ما، تساوي قيمتها عند ذلك العدد. أي أن:

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د(س)} = \text{د(أ)}$$

فمثلاً: إذا كانت $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥$ فإن:

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)} = \text{د(٢)}$$

$$= (٢)^{٢} - ٣(٢) + ٥$$

$$= ٤ - ٦ + ٥$$

$$= ٣$$

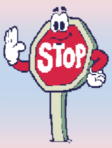
وتستخدم هذه الطريقة في الحالات التي تكون فيها الدالة معرّفة عند العدد الذي تقترب منه س

وهذه الحالات هي:

أ- **إذا كانت الدالة ثابتة:** وتكون غايتها عند أي عدد تساوي قيمة الثابت. أي أن:

إذا كانت $\text{د(س)} = \text{ك}$ ، حيث ك عدد ثابت فإن:

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د(س)} = \text{ك} \qquad \forall \quad \text{أ} \in \text{ح}$$



أمثلة:

١) إذا كانت $\text{د(س)} = ١٠$ فإن:

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)} = ١٠ \quad \text{وكذلك} \quad \lim_{\text{س} \to \sqrt{٥}} \text{د(س)} = ١٠$$

٢) $\lim_{\text{س} \to -١} (\sqrt{٣}) = \sqrt{٣}$

٣) $\lim_{\text{س} \to ٠} (-١٥) = -١٥$

ب- إذا كانت الدالة متعددة حدود: لأن متعددات الحدود (كما درست سابقاً) معرّفة لجميع الأعداد الحقيقية (معرّفة دائماً في ح).

أمثلة:

١) إذا كانت د(س) = س^{٣} + ٢س + ١ فإن:

غـــا$_{س \leftarrow ٣}$ د(س) = (٣)^{٣} + ٢(٣) + ١

= ٢٧ + ٦ + ١

= ٣٤

٢) جد غـــا$_{س \leftarrow -١}$ (س^{٣} − ٢س + ٥)

الحل: غـــا$_{س \leftarrow -١}$ (س^{٣} − ٢س + ٥) = (−١)^{٣} − ٢(−١) + ٥

= −١ + ٢ + ٥

= ٦

٣) إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٤س − ٤ فإن:

غـــا$_{س \leftarrow -٣}$ د(س) = (−٣)^{٢} − ٤(−٣) − ٤

= ٩ + ١٢ − ٤

= ١٧

٤) غـــا$_{س \leftarrow -٢}$ (س^{٤} − ٣س^{٢} + ٥) = (−٢)^{٤} − ٣ (−٢)^{٢} + ٥

= ١٦ − ١٢ + ٥

= ٩

٥) غـــا$_{س \leftarrow \sqrt{٢}}$ (س^{٢} + ١) = ($\sqrt{٢}$)^{٢} + ١

= ٢ + ١

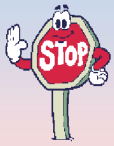
= ٣

ج- إذا كانت الدالة جذرية وكانت نتيجة التعويض للدالة تحت الجذر التربيعي (ومضاعفاته) عدد غير سالب. أي:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[ن]{ل(س)}$ ، أ ∋ ح فإن:

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{غـــــا}}$ د(س) = د(أ) ∀ ن عدد فردي

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{غـــــا}}$ د(س) = د(أ) ∀ ن عدد زوجي ، ل(أ) ≥ صفر



أمثلة:

١) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{غـــــا}} \sqrt{س^{٢} - ٣س + ٥} = \sqrt{(-٢)^{٢} - ٣(-٢) + ٥} = \sqrt{٤+٦+٥} = \sqrt{١٥}$

٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{غـــــا}} \sqrt[٣]{س^{٢} - ٥} = \sqrt[٣]{(٢)^{٢} - ٥} = \sqrt[٣]{-١} = -١$

٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{غـــــا}} \sqrt[٥]{٤س^{٢} - ٢س + ٢} = \sqrt[٥]{٣٦ - ٦ + ٢} = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

٤) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{غـــــا}} \sqrt[٤]{س^{٣} - ٩س + ١} = \sqrt[٤]{١٢٥ - ٤٥ + ١} = \sqrt[٤]{٨١} = ٣$

د- إذا كانت الدالة كسرية بشرط أن تكون نتيجة التعويض في دالة المقام لا تساوي صفراً.

أي:

$$\text{إذا كانت د(س)} = \frac{\text{هـ(س)}}{\text{ل(س)}} \quad \text{فإن:}$$

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{غـــا}} \text{ د(س)} = \text{د(أ)} \qquad \forall \quad \text{أ} \in \text{ح ، ل(أ)} \neq \text{صفر}$$

أمثلة:

١) $\text{إذا كانت د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٥}$ فإن:

$$\underset{\text{س} \to -١}{\text{غـــا}} \text{ د(س)} = \frac{(-١)^{٢} + ٣}{(-١)^{٢} - ٥} = \frac{٤}{-٤} = -١$$

٢) $$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{غـــا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٨}{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤} = \frac{(٢)^{٣}+٢(٢)^{٢}+٨}{٢(٢)^{٢}-٣(٢)+٤} = \frac{٨+٨+٨}{٨-٦+٤} = \frac{٢٤}{٦} = ٤$$

٣) $$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{غـــا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ٧} = \frac{(٣)^{٢}-٢(٣)-٣}{٣(٣)^{٢}+٧} = \frac{٩-٦-٣}{٢٧+٧} = \frac{\text{صفر}}{٣٤} = \text{صفر}$$

أما إذا كانت نتيجة التعويض في دالة المقام تساوي صفراً، فنلجأ إلى طريقة (التحليل إلى العوامل).

٢- طريقة التحليل إلى العوامل:

تستخدم هذه الطريقة في حالة الدوال الكسرية التي تكون فيها نتيجة التعويض لدالة المقام تساوي صفراً. وتتم بتحليل البسط أو المقام أو كليهما باستخدام طرق التحليل التي درستها سابقاً، ثم اختصار العوامل المتشابهة بين البسط والمقام بحيث تصبح نتيجة التعويض لدالة المقام لا تساوي صفراً. عندئذ نستخدم طريقة التعويض المباشر آنفة الذكر.

أمثلة:

١) جد $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{غــا}} \dfrac{\text{س}+٢}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}}$

الحل:

من الواضح أن نتيجة التعويض لدالة المقام عندما س=−٢ تساوي صفراً، وعليه نحلل المقام بإخراج العامل المشترك الأكبر ثم نختصر العوامل المتشابهة بين البسط والمقام، وبعد ذلك يمكننا التعويض بالقيمة س =−٢:

$$\underset{\text{س}\to -٢}{\text{غــا}} \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}} = \underset{\text{س}\to -٢}{\text{غــا}} \frac{\cancel{(\text{س}+٢)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}+٢)}}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{غــا}} \frac{١}{\text{س}}$$

$$= \frac{١}{-٢}$$

٢) جد $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{غــا}} \dfrac{\text{س}^{٢}-٢٥}{\text{س}-٥}$

الحل:

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{غــا}} \frac{\text{س}^{٢}-٢٥}{\text{س}-٥} = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{غــا}} \frac{\cancel{(\text{س}-٥)}(\text{س}+٥)}{\cancel{(\text{س}-٥)}} = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{غــا}} (\text{س}+٥) = ٥+٥ = ١٠$$

٣) جد $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{غــا}} \dfrac{\text{س}^{٣}+٢٧}{\text{س}+٣}$

الحل:

$$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{غــا}} \frac{\text{س}^{٣}+٢٧}{\text{س}+٣} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{غــا}} \frac{\cancel{(\text{س}+٣)}(\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٩)}{\cancel{(\text{س}+٣)}}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٣}{\text{غــا}} (\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٩) = (-٣)^{٢}-٣(-٣)+٩ = ٩+٩+٩ = ٢٧$$

٤) جد $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{غـــا}} \dfrac{س^{٢}-٢س-٣}{س^{٢}-٩}$

الحل:

$$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{غـــا}} \dfrac{س^{٢}-٢س-٣}{س^{٢}-٩} = \underset{س\leftarrow ٣}{\text{غـــا}} \dfrac{\cancel{(س-٣)}\,(س+١)}{\cancel{(س-٣)}(س+٣)}$$

$$= \underset{س\leftarrow ٣}{\text{غـــا}} \dfrac{(س+١)}{(س+٣)} = \dfrac{٣+١}{٣+٣} = \dfrac{٤}{٦} = \dfrac{٢}{٣}$$

(٢-٤) إيجاد غاية الدالة المجزّأة:

بعض الدوال الحقيقية تكون معرّفة بأكثر من قاعدة اقتران (كل قاعدة اقتران لفترة معينة من الأعداد الحقيقية)، مثل:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣ & \forall \; س > ٢ \\ ٧ - ٣\,س & \forall \; س < ٢ \end{cases}$$

لاحظ أن قاعدة الاقتران لهذه الدالة هي د(س) = $س^{٢}$ − ٣ عندما س > ٢ (أي لكل الأعداد الحقيقية التي هي أكبر من العدد ٢ أي التي تقع إلى يمينه على خط الأعداد). وأن قاعدة الاقتران لهذه الدالة هي د(س) = ٧ − ٣س عندما س < ٢ (أي لكل الأعداد الحقيقية التي هي أصغر من العدد ٢ أي التي تقع إلى يساره على خط الأعداد). وأن العدد الذي يفصل بين هاتين الفترتين هو العدد ٢.

وبصورة عامة إذا كانت الدالة مجزّأة بالصيغة:

$$د(س) = \begin{cases} هـ(س) & \forall \; س > حـ \\ ل(س) & \forall \; س < حـ \end{cases} \qquad \text{حيث } حـ \in ح$$

فإن:

أ- لإيجاد غاية الدالة د(س) عندما تقترب س من حـ (العدد الذي يفصل بين الفترتين) $\underset{س \leftarrow حـ}{غــا}$ د(س) نتبع ما يأتي:

١) نجد غاية الدالة من جهة اليمين (في الفترة التي تكون فيها س > حـ) أي نجد $\underset{س \leftarrow حـ}{غــا}$ هـ(س).

٢) نجد غاية الدالة من جهة اليسار (في الفترة التي تكون فيها س < حـ) أي نجد $\underset{س \leftarrow حـ}{غــا}$ ل(س).

٣) إذا كانت غاية الدالة من جهة اليمين تساوي غايتها من جهة اليسار، فإن الدالة لها غاية عند النقطة حـ ، وقيمتها هي قيمة كل من الغايتين.

أما إذا كانت الغايتان المذكورتان غير متساويتين، فإن الدالة ليس لها غاية عند النقطة حـ .

ب- لإيجاد غاية الدالة د(س) عندما تقترب س من ب حيث ب ∋ ح، ب ≠ حـ نتبع ما يأتي:

١) إذا كانت ب > حـ فإن $\lim\limits_{س \to ب}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ب}$ هـ(س)

٢) إذا كانت ب < حـ فإن $\lim\limits_{س \to ب}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ب}$ ل(س)

أمثلة:

١) إذا كانت د(س)= $\begin{cases} ٥س-١ & \forall\ س < ٢ \\ ٢س^٢+١ & \forall\ س > ٢ \end{cases}$

جد $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) إن وجدت.

الحل: المطلوب إيجاد غاية الدالة عند النقطة س←٢ (العدد الذي يفصل بين الفترتين) فنأخذ الغاية من جهة اليمين والغاية من جهة اليسار.

الغاية من جهة اليمين = $\lim\limits_{س \to ٢}$ (٢س^٢+١) = ٢(٢)^٢+١ = ٩

الغاية من جهة اليسار = $\lim\limits_{س \to ٢}$ (٥س-١) = ٥(٢) -١ = ٩

∵ الغاية من جهة اليمين = الغاية من جهة اليسار

∴ الدالة لها غاية عندما س←٢

∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = ٩

٢) إذا كانت د(س)= $\begin{cases} ٣س^٢-١ & \forall\ س > ١ \\ ٢س+٣ & \forall\ س < ١ \end{cases}$

فجد: أ) $\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) ب) $\lim\limits_{س \to ٣}$ د(س) ج) $\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س)

الحل: أ) الغاية من جهة اليمين = $\lim\limits_{س \to ١}$ (٣س^٢-١) = ٣(١)^٢-١ = ٢

الغاية من جهة اليسار = $\lim\limits_{س \to ١}$ (٢س+٣) = ٢(١) +٣ = ٥

∵ الغاية من جهة اليمين ≠ الغاية من جهة اليسار

∴ الدالة ليس لها غاية عندما س← ١

ب) $\because$ ٣ > ١ فنأخذ الدالة (٣س^{٢}−١) لتكون:

$$\underset{س\leftarrow ٣}{غـــــا}\ د(س) = \underset{س\leftarrow ٣}{غـــــا}\ (٣س^{٢}-١) = ٣(٣)^{٢}-١ = ٢٦$$

ج) $\because$ ٠ < ١ فنأخذ الدالة (٢س+٣) لتكون:

$$\underset{س\leftarrow ٠}{غـــــا}\ د(س) = \underset{س\leftarrow ٠}{غـــــا}\ (٢س+٣) = ٢(٠) +٣ = ٣$$

(٢−٥) إيجاد قيمة المجهول في دالة علمت غايتها:

إذا علمت غاية دالة تحتوي على مجهول فيمكننا إيجاد قيمة ذلك المجهول، وذلك بتكوين معادلة أحد طرفيها غاية الدالة وطرفها الآخر قيمة الغاية، وبإيجاد الغاية بإحدى الطرق الآنفة الذكر نحصل على معادلة جبرية، ونحلها لنحصل على قيمة المجهول.

أمثلة:

١) إذا كانت د(س)= أ س^{٢} − ١ وكانت $\underset{س\leftarrow ٢}{غـــــا}$ د(س)= ١٥ فما قيمة أ ؟

الحل: $\underset{س\leftarrow ٢}{غـــــا}\ (أس^{٢}-١) = ١٥$

$أ(٢)^{٢}-١ = ١٥$

$٤\ أ -١ = ١٥$

$٤\ أ = ١٦$

$\therefore\ أ = ٤$

٢) إذا كانت $\underset{س\leftarrow -١}{غـــــا}$ (هـ^{٢}س^{٢} − هـ س + ٣) = ٩ جد قيمة هـ.

الحل: $\underset{س\leftarrow -١}{غـــــا}\ (هـ^{٢}س^{٢} - هـ\ س + ٣) = ٩$

$هـ^{٢}(-١)^{٢} - هـ\ (-١) + ٣ = ٩$

$هـ^{٢} + هـ + ٣ - ٩ =٠$

$هـ^{٢} + هـ - ٦ =٠$

$(هـ + ٣)(هـ - ٢) =٠$

أما (هـ + ٣) =٠ ⇦ هـ = −٣

أو (هـ − ٢) =٠ ⇦ هـ = ٢

٣) إذا كانت د(س)= $\begin{cases} ٢س^٢+٣ & \forall \; س > ١ \\ أ س+٢ & \forall \; س < ١ \end{cases}$

فجد قيمة أ التي تجعل للدالة غاية عند س←١.

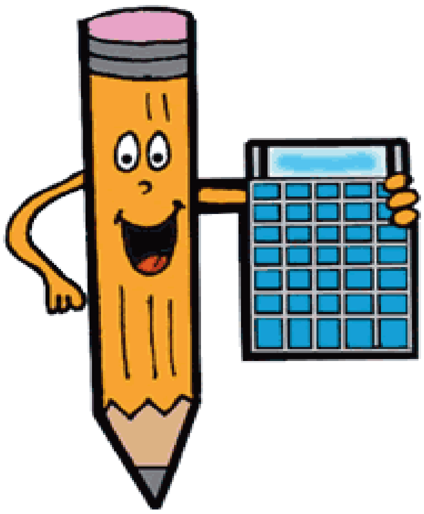
الحل: لكي تكون للدالة غاية عند س←١ (العدد الذي يفصل بين الفترتين) يجب أن تكون الغاية من جهة اليمين تساوي الغاية من جهة اليسار. فعليه يجب أن نساوي الغايتين:

$\underset{س\leftarrow ١}{غـــا}$ (أ س+٢) = $\underset{س\leftarrow ١}{غـــا}$ (٢س^٢+٣)

أ (١)+٢ = ٢(١)^٢+٣

أ + ٢ = ٥

∴ أ = ٣



تمارين (٢-١)

١) جد ناتج ما يأتي:

أ) $\underset{س \to ٢}{\text{غـــا}} (٥س^{٣}-٤س^{٢}-٩)$ ب) $\underset{س \to \sqrt{٢}}{\text{غـــا}} (٣س^{٤}-٥س^{٢}+٢)$

ج) $\underset{س \to -١}{\text{غـــا}} \sqrt{س^{٢} + ٤س + ٧}$ د) $\underset{س \to -٣}{\text{غـــا}} \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}$

هـ) $\underset{س \to ٥}{\text{غـــا}} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٨س + ١٥}$ و) $\underset{س \to ٣}{\text{غـــا}} \dfrac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} - ٣س}$

ز) $\underset{س \to ١}{\text{غـــا}} \dfrac{س^{٣} - ١}{٢س - ٢}$

٢) جد $\underset{س \to -١}{\text{غـــا}}$ د(س) إن وجدت إذا علمت أن د(س)= $\begin{cases} س^{٢}+١ & \forall \ س > -١ \\ ٢ - س & \forall \ س < -١ \end{cases}$

٣) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س - ٢ & \forall \ س \geq ١ \\ ٢س^{٢} - ٣ & \forall \ س < ١ \end{cases}$ ، فجد كلاً من:

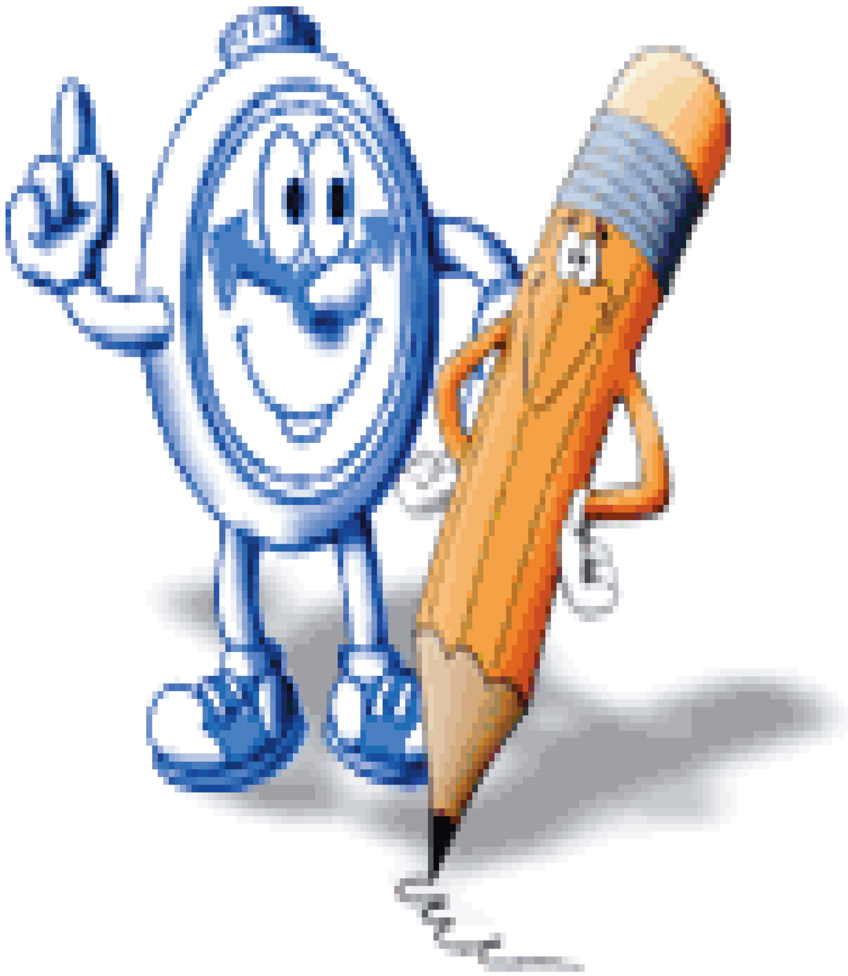
أ) $\underset{س \to ١}{\text{غـــا}}$ د(س) ب) $\underset{س \to ٥}{\text{غـــا}}$ د(س) ج) $\underset{س \to -٢}{\text{غـــا}}$ د(س)

٤) إذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{غـــا}} (أ س^{٢} - ٥) = ١٣$ فما قيمة أ ؟

٥) إذا كانت $\lim\limits_{س \to -١}$ (٣س^{٢} – ص^{٢}س + ٥) = ١٧ فجد قيمة ص ؟

٦) جد قيمة هـ التي تجعل للدالة الآتية غاية عندما س←٣ :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & \forall \ س < ٣ \\ س + هـ & \forall \ س \geq ٣ \end{cases}$$



عند دراسة الفصل الثالث (المشتقة) وفي نهاية الساعة الدراسية المخصصة لكل مفردة من المنهج يتوقع من المتعلم أن :

١. يبين مفهوم المشتقة هندسياً .
٢. يستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقة للدوال بسهولة.
٣. يحسب مشتقة الدوال المختلفة عند نقطة معينة بدقة .
٤. يجد المشتقة الثانية للدوال المختلفة باستخدام الرموز الرياضية .
٥. يجد المشتقة الثانية للدوال المختلفة عند نقطة معينة بدقة .
٦. يبين التفسير الهندسي لمشتقة الدالة عند نقطة معينة بشكل صحيح .
٧. يستخرج معادلة المماس لمنحني عند نقطة معينة بشكل صحيح.
٨. يحسب ميل المستقيم باستخدام المعادلة بدقة.
٩. يجد معادلة العمودي على المماس لمنحني عند نقطة معينة بشكل صحيح.
١٠. يجد نقطة أو أكثر تنتمي لدالة منحني عندها المماس يوازي مستقيماً معلوما ًبدقة.

الفصل الثالث

المشتقة

(٣–١) مقدمة:

تعتبر المشتقة من المفاهيم الأساسية في الرياضيات وذلك لتطبيقاتها المهمة والواسعة في الرياضيات والعلوم الأخرى. ويعتمد تعريفها على الغاية، وتمثل معدل التغير الذي يحدث في الدالة بتغير عناصر مجالها، فمتى ما وجد تغير سترافقه المشتقة. وهندسياً تمثل مشتقة الدالة عند نقطةٍ ما ميل المماس لمنحني الدالة عند تلك النقطة.

ويرمز لمشتقة الدالة د(س) بالرمز د$'$(س) أو ص$'$ ، ويرمز للمشتقة الثانية لها بالرمز د$''$(س) أو ص$''$.

(٣–٢) قواعد الاشتقاق:

القاعدة الأولى: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفراً. أي أن:

إذا كانت د(س) = أ حيث أ عدد ثابت فإن:

د$'$(س) = صفر

مثال : جد مشتقة الدوال الآتية:

١) د(س)=١٥

الحل: د$'$(س) = صفر

٢) د(س)=$\sqrt{١٣}$

الحل: د$'$(س) = صفر

٣) د(س)= $\frac{-٥}{٨}$

الحل: د$'$(س) = صفر

٤) د(س)=هـ^{٢}–١

الحل: د$'$(س) = صفر **[لماذا؟]**

القاعدة الثانية: مشتقة دالة بحد واحد ذات متغير مرفوع لأس تساوي الأس مضرباً في المتغير مطروحاً من الأس العدد (١). أي أن:

إذا كانت د(س) = $س^{ن}$ حيث س ∋ ح/{٠} ، ن ∋ ح فإن:

$$د^{/}(س) = ن\ س^{ن-١}$$

أمثلة : جد مشتقة الدوال الآتية:

١) د(س)= $س^{٤}$

الحل: $د^{/}(س) = ٤ \times س^{٤-١} = ٤س^{٣}$

٢) د(س)= $س^{-٢}$

الحل: $د^{/}(س) = -٢ \times س^{-٢-١} = -٢س^{-٣}$

٣) د(س)= $\sqrt[٣]{س^{٤}}$

الحل:

تذكير: لتحويل الجذور إلى أسس نتبع القانون الآتي: $\sqrt[م]{س^{ن}} = س^{\frac{ن}{م}}$

د(س)= $س^{\frac{٤}{٣}}$

$$د^{/}(س) = \frac{٤}{٣} س^{\frac{٤}{٣}-١} = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}}$$

٤) د(س) = $س^{\frac{٣}{٥}}$

الحل: $د^{/}(س) = \frac{٣}{٥} س^{\frac{٣}{٥}-١} = \frac{٣}{٥} س^{-\frac{٢}{٥}}$

$$= \frac{٣}{٥\ س^{\frac{٢}{٥}}}$$

$$= \frac{٣}{٥\sqrt[٥]{س^{٢}}}$$

القاعدة الثالثة: مشتقة ثابت مضروب في دالة تساوي الثابت مضروب في مشتقة الدالة. أي أن:

إذا كانت د(س) = ك هـ(س) حيث ك عدد ثابت فإن:

د/(س) = ك هـ/(س)

أمثلة : جد مشتقة الدوال الآتية:

١) د(س)= ١٢ س^{٣} ثم جد د/(١)

الحل: د/(س) = ١٢ × ٣ س^{٢} = ٣٦ س^{٢}

د/(١) = ٣٦ (١)^{٢} = ٣٦

٢) د(س)= $\frac{-٧}{س^{٣}}$ عند س=٣

الحل: د(س) = −٧ س$^{-٣}$ **(لماذا؟)**

د/(س) = (−٧) × (−٣) س$^{-٤}$ = ٢١ س$^{-٤}$ = $\frac{٢١}{س^{٤}}$

د/(٣) = $\frac{٢١}{(٣)^{٤}}$ = $\frac{\cancel{٢١}^{\,٧}}{\cancel{٨١}_{\,٢٧}}$ = $\frac{٧}{٢٧}$

٣) د(س) = ٣ $\sqrt[٤]{س}$

الحل: د(س) = ٣ س$^{\frac{١}{٤}}$

د/(س) = ٣ × $\frac{١}{٤}$ س$^{-\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{٣}{٤}$ س$^{-\frac{٣}{٤}}$

= $\frac{٣}{٤س^{\frac{٣}{٤}}}$

= $\frac{٣}{٤\sqrt[٤]{س^{٣}}}$

القاعدة الرابعة: مشتقة مجموع عدة دوال تساوي مجموع مشتقاتها. أي أن: إذا كانت $د(س) = د_{١}(س) + د_{٢}(س) + ... + د_{ن}(س)$ حيث $ن \in ص^{+}$

فإن: $د'(س) = د'_{١}(س) + د'_{٢}(س) + ... + د'_{ن}(س)$

أمثلة : جد مشتقة الدوال الآتية:

١) $د(س) = ٣س^{٥} + ٤س^{٤} - ٣س^{٢} + ٩$

الحل: $د'(س) = ١٥س^{٤} + ١٦س^{٣} - ٦س + صفر$

$= ١٥س^{٤} + ١٦س^{٣} - ٦س$

٢) $د(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{٣}{٤}س^{-٤} + ١٧$

الحل: $د'(س) = \frac{١}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣}س^{٢} + \frac{١}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢}س + \frac{٣}{\cancel{٤}} \times \cancel{(-٤)}^{-١} س^{-٥} + صفر$

$= س^{٢} + س - ٣س^{-٥}$

القاعدة الخامسة: مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب الدالة الأولى في مشتقة الدالة الثانية مضافاً إليه حاصل ضرب الدالة الثانية في مشتقة الدالة الأولى. أي أن:

إذا كانت $د(س) = هـ(س) \cdot ل(س)$ فإن:

$$د'(س) = هـ(س) \cdot ل'(س) + ل(س) \cdot هـ'(س)$$

أمثلة : جد مشتقة الدوال الآتية:

١) $د(س) = (٢س^{٢} - ٥)(٣س + ١)$ **عند س=٢**

الحل: $د'(س) = (٢س^{٢} - ٥) \times ٣ + (٣س + ١) \times ٤س$

$= ٦س^{٢} - ١٥ + ١٢س^{٢} + ٤س$

$= ١٨س^{٢} + ٤س - ١٥$

$د'(٢) = ١٨(٢)^{٢} + ٤(٢) - ١٥ = ٧٢ + ٨ - ١٥ = ٦٥$

٢) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}\,(\text{س} + ٦)$ عند $\text{س} = ٤$

الحل: $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,(\text{س} + ٦)$

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{س}^{\frac{١}{٢}} \times ١ + (\text{س} + ٦) \times \frac{١}{٢}\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \frac{(\text{س} + ٦)}{٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{٢\text{س} + \text{س} + ٦}{٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{٣\text{س} + ٦}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{د}'(٤) = \frac{٣ \times ٤ + ٦}{٢\sqrt{٤}} = \frac{٩}{٢}$$

طريقة ثانية للحل: $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}\,(\text{س} + ٦)$

$$= \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,(\text{س} + ٦)$$

$$= \text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{س} + ٦ \times \text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٦\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \overset{٣}{\cancel{٦}} \times \frac{١}{\cancel{٢}}\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣\sqrt{\text{س}}}{٢} + \frac{٣}{\sqrt{\text{س}}}$$

$$= \frac{٣\,\text{س} + ٦}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{د}'(٤) = \frac{٣ \times ٤ + ٦}{٢\sqrt{٤}} = \frac{٩}{٢}$$

القاعدة السادسة: مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي [(المقام مضروباً في مشتقة البسط) مطروحاً منه (البسط مضروباً في مشتقة المقام)] مقسوماً على مربع المقام. أي أن:

إذا كانت $د(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س)}$ ، $ل(س) \neq صفر$ فإن:

$$د^{/}(س) = \frac{ل(س) \cdot هـ^{/}(س) - هـ(س) \cdot ل^{/}(س)}{[\,ل(س)\,]^{٢}}$$

أمثلة : جد مشتقة الدوال الآتية:

١) $د(س) = \frac{٣س^{٢} - ٧}{س^{٢}}$ عند $س = ١$

الحل: $د^{/}(س) = \frac{س^{٢} \times ٦س - (٣س^{٢} - ٧) \times ٢س}{(س^{٢})^{٢}}$

$$= \frac{\cancel{٦س^{٣}} - \cancel{٦س^{٣}} + ١٤س}{س^{٤}}$$

$$= \frac{١٤ \times \cancel{س}}{س^{\cancel{٤}\,٣}}$$

$$= \frac{١٤}{س^{٣}}$$

$$د^{/}(١) = \frac{١٤}{(١)^{٣}} = ١٤$$

٢) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٣} - ١}$ ثم جد $\text{د}'(-١)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{(\text{س}^{٣} - ١) \times ٢\text{س} - (\text{س}^{٢} + ٣) \times ٣\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣} - ١)^{٢}}$

$$= \dfrac{٢\text{س}^{٤} - ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٤} - ٩\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣} - ١)^{٢}}$$

$$= \dfrac{-\text{س}^{٤} - ٩\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{(\text{س}^{٣} - ١)^{٢}}$$

$$\text{د}'(-١) = \dfrac{-(-١)^{٤} - ٩(-١)^{٢} - ٢(-١)}{((-١)^{٣} - ١)^{٢}}$$

$$= \dfrac{-٨}{٤} = -٢$$

٣) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{-١}{٣\text{س}^{٣}}$ ثم جد $\text{د}''(-١)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س}^{٣} \times \text{صفر} - (-١) \times ٩\text{س}^{٢}}{(٣\text{س}^{٣})^{٢}} = \dfrac{\cancel{٩\text{س}^{٢}}}{\cancel{٩}\text{س}^{\cancel{٦}\,٤}} = \dfrac{١}{\text{س}^{٤}}$

$$\text{د}''(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٤} \times \text{صفر} - (١) \times ٤\text{س}^{٣}}{(\text{س}^{٤})^{٢}} = \dfrac{-٤ \times \cancel{\text{س}^{٣}}}{\text{س}^{\cancel{٨}\,٥}} = \dfrac{-٤}{\text{س}^{٥}}$$

$$\text{د}''(-١) = \dfrac{-٤}{(-١)^{٥}} = ٤$$

طريقة ثانية:

$$د(س) = \frac{-١}{٣\, س^{٣}} = \frac{-١}{٣}\, س^{-٣}$$

$$د^{/}(س) = \frac{-١}{٣} \times (-٣)\, س^{-٤} = س^{-٤}$$

$$د^{//}(س) = -٤\, س^{-٥} = \frac{-٤}{س^{٥}}$$

$$د^{//}(-١) = \frac{-٤}{(-١)^{٥}} = ٤$$

القاعدة السابعة: مشتقة قوس مرفوع لأس معين تساوي الأس مضروباً في القوس مطروحاً من أسّه العدد (١)، مضروباً في مشتقة داخل القوس. أي أن:

إذا كانت $د(س) = [هـ(س)]^{ن}$ فإن:

$$د^{/}(س) = ن\, [هـ(س)]^{ن-١} \cdot هـ^{/}(س)$$

أمثلة : جد مشتقة الدوال الآتية:

١) $د(س) = (٢س^{٢} - ١)^{٥}$ عند $س = ١$

الحل: $د^{/}(س) = ٥ \times (٢س^{٢} - ١)^{٤} \times ٤س$

$= ٢٠س\, (٢س^{٢} - ١)^{٤}$

$د^{/}(١) = ٢٠ \times (١)\, (٢ \times (١)^{٢} - ١)^{٤}$

$= ٢٠ \times ١ \times ١$

$= ٢٠$

٢) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{(\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ١)^{٣}}$

الحل: $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{٣}{٢}}$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{٣}{٢}(\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{١}{٢}} \times (٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س})$$

$$= (٦\text{س}^{٣} + ٩\text{س})\sqrt{\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ١}$$

٣) $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٣}\right)^{٥}$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = ٥\left(\frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٣}\right)^{٤}\left(\frac{(\text{س}^{٢}+٣)\times ٢ - (٢\text{س}-١)\times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}\right)$

$$= ٥\times \frac{(٢\text{س}-١)^{٤}}{(\text{س}^{٢}+٣)^{٤}} \times \frac{٢\text{س}^{٢}+٦ - ٤\text{س}^{٢}+٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٣)^{٢}}$$

$$= \frac{-١٠(\text{س}^{٢}-\text{س}-٣)\,(٢\text{س}-١)^{٤}}{(\text{س}^{٢}+٣)^{٦}}$$

٤) $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ٥)^{٦}$ ثم جد $\text{د}'(٢)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = ٦ \times (\text{س}^{٢} - ٥)^{٥} \times ٢\text{س}$

$$= ١٢\text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٥)^{٥}$$

$$\text{د}'(٢) = ١٢ \times ٢\,[(٢)^{٢} - ٥]^{٥} = ٢٤ \times (-١) = -٢٤$$

تمارين (٣-١)

١) جد مشتقة الدوال الآتية:

أ) $\text{د(س)} = ٢٣$

ب) $\text{د(س)} = \text{س}^{-٧}$

ج) $\text{د(س)} = ٤\text{س}^{\frac{٥}{٤}}$

د) $\text{د(س)} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

هـ) $\text{د(س)} = \sqrt{\text{هـ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$

و) $\text{د(س)} = ٤\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ٣$ عند $\text{س} = -٣$

ز) $\text{د(س)} = (٤\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٧)^{\frac{٥}{٣}}$

ح) $\text{د(س)} = (٢\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)$ عند $\text{س} = ٧$

ط) $\text{د(س)} = \frac{١}{٢}\text{س}^{-٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ١$ عند $\text{س} = -٢$

ي) $\text{د(س)} = \dfrac{١}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}}$

ك) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} - ١}$

ل) $\text{د(س)} = \sqrt{٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س}}$

٢) جد المشتقة الثانية للدوال الآتية:

أ) $\text{د(س)} = ٥\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٦$ عند $\text{س} = ٣$

ب) $\text{د(س)} = (٢\text{س} + ١)^{٣}$ عند $\text{س} = ١$

ج) $\text{د(س)} = \dfrac{٣}{٤}\text{س}^{٤} + \dfrac{٢}{٣}\text{س}^{-٣} + ٥$ عند $\text{س} = ٢$

٣) أثبت أن:

أ) مشتقة الدالة $\text{د(س)} = (٢\text{س} - ٣)(\text{س} + ١)$ تساوي (١٥) عندما $\text{س} = ٤$.

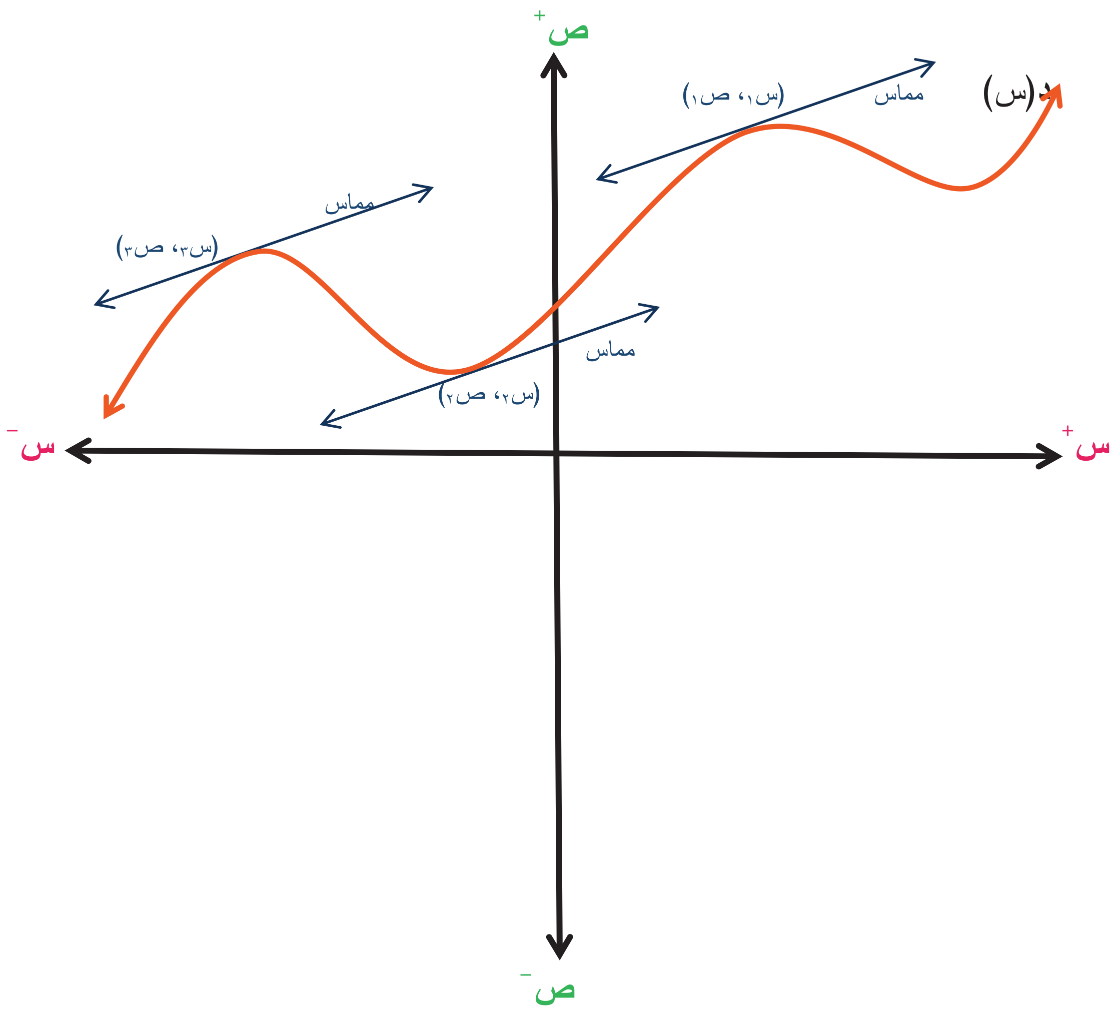
ب) المشتقة الثانية للدالة $\text{د(س)} = \dfrac{٤}{\text{س}^{٣}}$ تساوي (−٤٨) عندما $\text{س} = -١$.

ج) مشتقة الدالة $\text{د(س)} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ تساوي (١) عندما $\text{س} = ٥$

(٣-٣) تطبيقات هندسية على المشتقة:

أشرنا في بداية الفصل إلى أن المفهوم الهندسي لمشتقة الدالة عند نقطة معينة تمثل ميل المماس لمنحني الدالة عند تلك النقطة. وهنا سوف نهتم بمسألتين الأولى: إيجاد معادلة المماس لمنحني الدالة عند نقطةٍ ما، أو معادلة العمودي عليه أو كليهما، والثانية: إيجاد نقطة من نقاط الدالة يكون عندها المماس موازياً لمستقيم معلوم.

وهنا يجب أن يعلم الطالب بأن المماس هو مستقيم، وعندما نقول مماس لمنحني الدالة، يعني أن هذا المستقيم يشترك مع الدالة بنقطة واحدة تسمى نقطة التماس. وهي نقطة من نقاط الدالة (تحققها)، وبنفس الوقت نقطة من نقاط المستقيم (المماس). ومن الشكل (٣-١) يمكن أن نلاحظ بأن الدالة لها العديد من المماسات التي تختلف باختلاف نقاط الدالة.



شكل (٣-١)

أولاً: إيجاد معادلة المماس أو العمودي عليه

تعلمنا في الصف الرابع أن معادلة المستقيم إذا عُلِم ميله ونقطة من نقاطه هي:

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

حيث م هو ميله ، (س١، ص١) نقطة تنتمي له.

فإذا كان هذا المستقيم هو مماس الدالة، فإنه يشترك مع الدالة بنقطة التماس (س١، ص١) وهي نقطة من نقاط الدالة أي أنها تحقّق الدالة، لذا يمكننا إيجادها بالتعويض في معادلة الدالة.

وحسب المفهوم الهندسي للمشتقة فإن ميل المماس يمكن معرفته بإيجاد مشتقة الدالة عند نقطة التماس. وهكذا فإذا عُلِم ميل المماس ونقطة التماس فيمكننا تطبيق العلاقة أعلاه لإيجاد معادلته.

مثال ١ : جد معادلة المماس لمنحني الدالة د(س)=٢س^٢−٥س+٣ عند س=٢.

الحل: لإيجاد نقطة التماس نعوض عن قيمة س=٢ في الدالة:

د(٢) = ٢(٢)^٢−٥(٢)+٣ = ٨−١٠+٣ = ١

∴ النقطة (٢ ، ١) هي نقطة التماس (نقطة من نقاط المماس).

ولإيجاد الميل نجد مشتقة الدالة عند س=٢

د$'$(س) = ٤س − ٥

د$'$(٢) = ٤(٢) − ٥ = ٨−٥ = ٣

∴ م = ٣

نجد معادلة المماس بتطبيق العلاقة:

ص − ص١ = م (س − س١)

ص−١ = ٣ (س−٢)

ص−١ = ٣س−٦

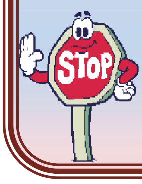
ص − ٣س −١ + ٦ = ٠

$\boxed{ص − ٣س + ٥ = ٠}$ هي معادلة المماس

ملاحظة: ميل العمودي على المماس هو المقلوب السالب لميل المماس.

أي أن:

$$\text{ميل العمودي على المماس} = \frac{-١}{\text{م}}$$



مثال٢ : جد معادلة العمودي على المماس لمنحني الدالة:

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{١+٢\text{س}} \qquad \text{عند س} = -١$$

الحل:
$$\text{د}(-١) = \frac{-١}{١+٢(-١)} = \frac{-١}{-١} = ١$$

∴ النقطة (−١ ، ١) هي نقطة التماس ونقطة من نقاط العمودي على المماس.

$$\text{د}^{/}(\text{س}) = \frac{(١+٢\text{س})\times ١ - \text{س}\times ٢}{(١+٢\text{س})^{٢}} = \frac{١+\cancel{٢\text{س}} - \cancel{٢\text{س}}}{(١+٢\text{س})^{٢}} = \frac{١}{(١+٢\text{س})^{٢}}$$

$$\text{د}^{/}(-١) = \frac{١}{(١+٢(-١))^{٢}} = \frac{١}{(-١)^{٢}} = ١$$

∴ ميل المماس = ١

$$\therefore \text{ميل العمودي على المماس} = \frac{-١}{١} = -١$$

$$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}\ (\text{س} - \text{س}_{١})$$

$$\text{ص}-١ = -١\ (\text{س}-(-١))$$

$$\text{ص}-١ = -(\text{س}+١)$$

$$\text{ص} + \text{س} -١ + ١ = ٠$$

$\boxed{\text{ص} + \text{س} = ٠}$ هي معادلة العمودي على المماس

مثال٣ : جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحني الدالة: د(س)= $(س+٣)^٣$ عند س=−٥.

الحل: د(−٥) = $(−٥+٣)^٣$ = $(−٢)^٣$ = −٨

∴ النقطة (−٥ ، −٨) هي نقطة التماس.

$د^/(س)$ = ٣ $(س+٣)^٢$ × ١ = ٣$(س+٣)^٢$

$د^/(−٥)$ = ٣$(−٥+٣)^٢$ = ٣ × $(−٢)^٢$ = ٣×٤ = ١٢

∴ م = ١٢

ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

ص−(−٨) = ١٢ (س−(−٥))

ص+٨ = ١٢س+٦٠

$\boxed{ص − ١٢س− ٥٢ = ٠}$ هي معادلة المماس

ميل العمودي على المماس = $\frac{−١}{١٢}$ **[المقلوب السالب لميل المماس]**

ص+٨ = $\frac{−١}{١٢}$ (س+٥)

١٢ص+٩٦ = − (س+٥) **[بضرب طرفي المعادلة × ١٢]**

١٢ص + س + ٥ + ٩٦ = ٠

$\boxed{١٢ص + س + ١٠١ = ٠}$ هي معادلة العمودي على المماس

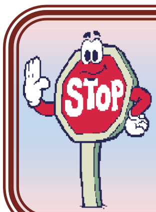
ثانياً: إيجاد نقطة تنتمي إلى الدالة عندها المماس يوازي مستقيم معلوم

إن المستقيم المعلوم هو المستقيم الذي عُلِمت معادلته، وصيغتها العامة هي:

أ س + ب ص + جـ = صفر حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح

ومن معادلة المستقيم يمكننا معرفة ميله وذلك وفق العلاقة الآتية:

ميل المستقيم = $\dfrac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$



بشرط أن يكون س ، ص في طرف واحد من المعادلة ، وأن ب ≠ صفراً

وحيث أن المستقيمات المتوازية لها نفس الميل (ميولها متساوية)، لذا فإن ميل المماس يساوي ميل المستقيم الموازي له. وحسب المفهوم الهندسي لمشتقة دالة المنحني عند نقطة معلومة (نقطة التماس) والتي تساوي ميل المماس؛ فيمكننا بعد أن نساوي تلك المشتقة بالميل أن نحصل على معادلة نحلها لنحصل على الإحداثي السيني لنقطة التماس. وبما أن هذه النقطة تحقق الدالة لذا فعند تعويضها بالدالة نحصل على إحداثيها الصادي.

مثال ١ : جد نقطة تنتمي لمنحني الدالة د(س)= س^{٢} − ٨س والتي عندها المماس يوازي المستقيم: ص + ٢س + ٤ = ٠

الحل: ميل المستقيم = $\dfrac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\dfrac{-٢}{١}$ = −٢

∴ ميل المماس = −٢ [المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل]

د$^{/}$(س) = ٢س−٨

د$^{/}$(س) = م

٢س−٨ = −٢

٢س = ٦ ⇦ س = ٣

د(س)= س^{٢} − ٨س

د(٣) = (٣)^{٢} − ٨(٣) = ٩ − ٢٤ = −١٥

∴ النقطة (٣ ، −١٥) تنتمي إلى الدالة.

مثال٢ : جد نقطة أو أكثر تنتمي إلى الدالة د(س)= س^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ٩س + ٤ والتي عندها المماس يوازي المستقيم: ص − ٩س = ٧

الحل: ميل المستقيم = $\frac{-\text{ معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-(-٩)}{١}$ = ٩

∴ ميل المماس = ٩

د$^{/}$(س) = ٣س^{٢} − ٣س − ٩

د$^{/}$(س) = م

٣س^{٢} − ٣س − ٩ = ٩

س^{٢} − س − ٣ = ٣ [بقسمة طرفي المعادلة على ٣]

س^{٢} − س − ٦ = ٠

(س − ٣) (س + ٢) = ٠

أما س − ٣ = ٠ ⇦ س = ٣

د(٣)= (٣)^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ (٣)^{٢} − ٩(٣) + ٤ = $\cancel{٢٧}$ − $\frac{٢٧}{٢}$ − $\cancel{٢٧}$ + ٤ = $\frac{-١٩}{٢}$

∴ النقطة (٣ ، $\frac{-١٩}{٢}$) تنتمي إلى الدالة.

أو س + ٢ = ٠ ⇦ س = −٢

د(−٢)= (−٢)^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ (−٢)^{٢} − ٩(−٢) + ٤ = −٨ − ٦ + ١٨ + ٤ = ٨

∴ النقطة (−٢ ، ٨) تنتمي إلى الدالة.

ملاحظة: ميل محور السينات يساوي صفراً.

مثال٣ : جد نقطة تنتمي لمنحني الدالة د(س)= س^{٢}−٢س+٥ والتي عندها المماس يوازي محور السينات.

الحل: ∵ المماس // محور السينات

∴ ميل المماس = صفر **[المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل]**

د$^{/}$(س) = ٢س − ٢

د$^{/}$(س) = م

٢س−٢ = ٠

٢س = ٢ ⇦ س = ١

د(١) = (١)^{٢} − ٢(١) + ٥ = ١ − ٢ + ٥ = ٤ **[بالتعويض عن قيمة س في الدالة]**

∴ النقطة (١ ، ٤) تنتمي إلى الدالة.

مثال٤ : جد نقطة تنتمي لمنحني الدالة د(س)= ٥س^{٢}−٧س+٥ والتي عندها المماس يوازي المستقيم: ٢ص= ٦س+٥.

الحل:

لإيجاد ميل المستقيم الموازي للماس يجب أن يكون س ، ص في طرف واحد من المعادلة،

وأن ب ≠ صفراً

وعليه فإن معادلة المستقيم ستكون: ٢ص − ٦س = ٥

ميل المستقيم = $\dfrac{-\text{ معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\dfrac{-(-٦)}{٢}$ = ٣ = ميل المماس (م) **[لماذا؟]**

د$^{/}$(س) = ١٠س−٧

١٠س−٧ = ٣

١٠س = ١٠ ⇦ س = ١

د(١) = ٥(١)^{٢} − ٧(١) + ٥ = ٥ − ٧ + ٥ = ٣

∴ النقطة (١ ، ٣) تنتمي إلى الدالة.

تمارين (٣-٢)

١) جد معادلة المماس لمنحني الدالة: د(س) = $س^{٣}-٣س^{٢}+٩س+١$ عند النقطة س=١.

٢) جد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحني الدالة: د(س) = $س^{٣}-٨س-٣$ عند النقطة س=-٢.

٣) جد ميل المماس للمنحني د(س) = $س^{٢}+٤س-٣$ عند س=٢ ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة.

٤) جد معادلة مماس المنحني: د(س) = $س^{٣}-٣س^{٢}+٩س+٥$ عند النقطة س= صفر.

٥) جد نقطة تنتمي إلى الدالة: د(س) = $س^{٢}-٤س+٥$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم: ٢س- ص= صفر.

٦) جد نقطة أو أكثر تنتمي لمنحني الدالة: د(س) = $س^{٣}-٣س+٥$ والتي عندها المماس يوازي محور السينات.

٧) جد نقطة تنتمي إلى الدالة: د(س) = $٥س^{٢}+٣س-٢$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم: ص= ٣س + ٧.

٨) جد نقطة أو أكثر تنتمي إلى منحني الدالة: د(س) = $س^{٣}-٣س^{٢}-٩س+٤$ والتي عندها ميل المماس يساوي صفراً.

عند دراسة الفصل الرابع (التكامل) وفي نهاية الساعد الدراسية المخصصة لكل مفردة من المنهج ، يتوقع من المتعلم أن :

١. يبين مفهوم (التكامل) باستخدام الرموز الرياضية .

٢. يطبق مسألة في تكامل الدالة الثابتة بسهولة .

٣. يجد تكامل متغير مرفوع لأس بسهولة .

٤. يجد تكامل ثابت مضروب في دالة بسهولة .

٥. يجد تكامل مجموعة من الدوال بسهولة.

٦. يجد تكامل مقدار داخل قوس مرفوع لأس معين (بشرط أن يكون القوس مضروب في مشتقة داخل القوس) بسهولة.

٧. يحدد الطريقة المناسبة لتكامل الدوال المختلفة بدقة .

الفصل الرابع

التكامل

(٤-١) مقدمة:

يعتبر موضوع التكامل من المواضيع المهمة في الرياضيات لما له من تطبيقات واسعة مثل: إيجاد المساحة المحصورة بين المنحني ومحور السينات، وإيجاد معادلة المنحني إذا عُلِم ميله، وإيجاد إزاحة الجسم إذا أعطيت سرعته أو تعجيله، وغيرها من التطبيقات.

ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيراً ما نحتاج لدراسة سلوك الدالة والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة. وعادة ما يدرس علم التفاضل والتكامل بعد دراسة أساسيات الجبر.

لقد مرَّ معك كيفية إيجاد مشتقة الدالة، فمثلاً الدالة د(س) = س^{٢} − ٣س + ٥ مشتقتها هي د$^{/}$(س)=٢س−٣ . وإذا أردت أن تجد قاعدة الاقتران (الدالة) التي مشتقتها (٢س−٣) فإنك ستجد عدداً غير منتهيٍ من الدوال التي يمكن أن تكون مشتقتها (٢س−٣) مثل:

(س^{٢}−٣س+٥)، (س^{٢}−٣س−٦)، (س^{٢}−٣س+١٠٠)، (س^{٢}−٣س)، ... . حيث تلاحظ أن الفرق بين كل من هذه الدوال عدداً ثابتاً لأن مشتقة الثابت تساوي صفراً. وعليه يمكن التعبير عن مجموعة هذه الدوال بالصورة: د(س)=س^{٢}−٣س+جـ ، حيث جـ عدد ثابت

إن عملية إيجاد الدالة د(س) التي مشتقتها د$^{/}$(س)=٢س−٣ تسمى تكامل الدالة د$^{/}$(س)، وتسمى الدالة(س^{٢}−٣س+جـ) تكامل الدالة (٢س−٣)، أي أن **عملية التكامل هي عكس عملية الاشتقاق.**

ويعبر عن ذلك باستخدام الرموز على النحو الآتي: ∫ (٢س−٣) **ءس** = س^{٢}−٣س+ **جـ**

حيث ترمز العلامة (∫) إلى عملية التكامل ، و(**ءس**) تعني أن التكامل بالنسبة للمتغير س (بدلالة المتغير س) ، ويسمى (**جـ**) ثابت التكامل.

وينقسم التكامل على جزأين: التكامل المحدد والتكامل غير المحدد. وسنقتصر في دراستنا هذا العام على **التكامل غير المحدد** والذي يعني إيجاد المعكوس الرياضي للتفاضل ولهذا السبب يسمى أيضا **بالاشتقاق العكسي**.

(٤-٢) قواعد التكامل:

علمنا أن ملخص خطوات عملية الاشتقاق هي: نضرب في الأس، ونطرح من الأس العدد (١).
فإذا أردنا أن نعكس هذه الخطوات فإن التسلسل المنطقي لملخص خطوات التكامل (باعتبار أن التكامل عكس الاشتقاق) سيكون:

١. نضيف للأس العدد (١).
٢. نقسم على الأس الجديد.

وفيما يأتي تفصيل لقواعد التكامل:

القاعدة الأولى: أ) $\int ءس = س + جـ$ حيث جـ $\in$ ح

أمثلة : ١) $\int ءن = ن + جـ$

٢) $\int ءك = ك + جـ$

٣) $\int ءب = ب + جـ$

ب)

$$\int س^{ن} ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$$ حيث جـ $\in$ ح

بشرط $ن \neq -١$ **[لماذا؟]**

وتعتبر هذه القاعدة هي المبدأ الأساس لعملية التكامل.

أمثلة : جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$١)\ \int \text{س}^{٣}\, \text{دس} = \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \text{ج} = \frac{١}{٤}\,\text{س}^{٤} + \text{ج}$$

$$٢)\ \int \text{ن}^{-٢}\, \text{دن} = \frac{\text{ن}^{-١}}{-١} + \text{ج} = \frac{-١}{\text{ن}} + \text{ج}$$

$$٣)\ \int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\, \text{دس} = \frac{\text{س}^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + \text{ج} = \frac{٣}{٥}\,\text{س}^{\frac{٥}{٣}} + \text{ج}$$

$$٤)\ \int \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}\, \text{دس} = \int \text{س}^{\frac{٢}{٥}}\, \text{دس} = \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٥}}}{\frac{٧}{٥}} + \text{ج} = \frac{٥}{٧}\,\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{ج}$$

$$٥)\ \int \frac{\text{دس}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{\frac{٥}{٣}}} = \int \text{س}^{-\frac{٥}{٣}}\, \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{-\frac{٢}{٣}}}{-\frac{٢}{٣}} + \text{ج} = \frac{-٣}{٢}\,\text{س}^{-\frac{٢}{٣}} + \text{ج}$$

$$= \frac{-٣}{٢\text{س}^{\frac{٢}{٣}}} + \text{ج}$$

$$= \frac{-٣}{٢\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}} + \text{ج}$$

القاعدة الثانية: تكامل ثابت × دالة = الثابت × تكامل الدالة.

أي أن:

$$\int \text{أ}\ \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = \text{أ} \int \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} + \text{جـ}$$ حيث أ، جـ ∈ ح

أمثلة : جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int ٣\ \text{ءس} = ٣ \int \text{ءس} = ٣\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{١}{٤}\ \text{ءب} = \frac{١}{٤} \int \text{ءب} = \frac{١}{٤}\ \text{ب} + \text{جـ}$

٣) $\int ٤\text{س}^{٣}\ \text{ءس} = ٤ \int \text{س}^{٣}\ \text{ءس} = ٤ \times \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \text{س}^{٤} + \text{جـ}$

٤) $\int \frac{١}{٢}\ \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢} \times \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\ \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\ \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{١}{٣} \sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$

٥) $\int ٤ \sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{ءس} = ٤ \int \text{س}^{\frac{١}{٣}}\ \text{ءس} = ٤ \times \frac{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= ٤ \times \frac{٣}{٤}\ \text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= ٣\ \text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= ٣ \sqrt[٣]{\text{س}^{٤}} + \text{جـ}$

القاعدة الثالثة: تكامل مجموع عدد محدود من الدوال يساوي مجموع تكاملاتها.

أي أن: $\int \left(\text{د}_{١}(\text{س}) + \text{د}_{٢}(\text{س}) + \dots + \text{د}_{\text{ن}}(\text{س})\right)\text{ءس}$

$$= \int \text{د}_{١}(\text{س})\,\text{ءس} + \int \text{د}_{٢}(\text{س})\,\text{ءس} + \dots + \int \text{د}_{\text{ن}}(\text{س})\,\text{ءس}$$

أمثلة : جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٦)\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}\,\text{ءس} - \int ٣\text{س}\,\text{ءس} + \int ٦\,\text{ءس}$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\times\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + \text{جـ}$$

٢) $\int (٤\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢})\,\text{ءس} = \int ٤\text{س}^{٣}\,\text{ءس} + \int ٣\text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

$$= ٤ \times \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + ٣ \times \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

$$= \text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + \text{جـ}$$

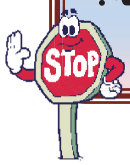
٣) $\int (٣\text{س}^{٥} - \sqrt[٥]{\text{س}} + ٧)\,\text{ءس} = \int ٣\text{س}^{٥}\,\text{ءس} - \int \text{س}^{\frac{١}{٥}}\,\text{ءس} + \int ٧\,\text{ءس}$

$$= ٣\times\frac{\text{س}^{٦}}{٦} - \frac{\text{س}^{\frac{٦}{٥}}}{\frac{٦}{٥}} + ٧\text{س} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٦} - \frac{٥}{٦}\text{س}^{\frac{٦}{٥}} + ٧\text{س} + \text{جـ}$$

٤) $\int (٢\text{س} + ٣)^{٢}\,\text{ءس} = \int (٤\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ٩)\,\text{ءس}$

$$= ٤\times\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ١٢\times\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ} = \frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$$



ملاحظة: يتوزع التكامل على الجمع والطرح، ولا يتوزع على الضرب والقسمة.

أمثلة: جد التكاملات الآتية:

١) $\int (س^{٢}-٣)(س+٤)\ ءس = \int (س^{٣} + ٤س^{٢} - ٣س - ١٢)\ ءس$

$$= \frac{س^{٤}}{٤} + ٤ \times \frac{س^{٣}}{٣} - ٣ \times \frac{س^{٢}}{٢} - ١٢س + جـ$$

$$= \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{٤}{٣} س^{٣} - \frac{٣}{٢} س^{٢} - ١٢س + جـ$$

٢) $\int \frac{٥س^{٤}+٢س}{س^{٣}}\ ءس = \int \left(\frac{٥س^{٤}}{س^{٣}} + \frac{٢س}{س^{٣}}\right) ءس$

$$= \int (٥س+٢س^{-٢})\ ءس$$

$$= ٥ \times \frac{س^{٢}}{٢} + ٢ \times \frac{س^{-١}}{-١} + جـ$$

$$= \frac{٥}{٢} س^{٢} - \frac{٢}{س} + جـ$$

٣) $\int \frac{س^{٣}+٧س^{٢}-٨س}{س-١}\ ءس = \int \frac{س(س^{٢}+٧س-٨)}{س-١}\ ءس$

$$= \int \frac{س(س+٨)(س-١)}{(س-١)}\ ءس$$

$$= \int (س^{٢}+٨س)\ ءس = \frac{س^{٣}}{٣} + ٨ \times \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$$

$$= \frac{١}{٣} س^{٣} + ٤س^{٢} + جـ$$

القاعدة الرابعة: **تكامل مقدار داخل قوس مرفوع لأس (بشرط أن يكون القوس مضروب في مشتقة داخل القوس)، يساوي القوس نفسه بعد إضافة واحد للأس، مقسوماً على الأس الجديد.** أي أن إذا كانت د(س) قابلة للاشتقاق فإن:

$$\int [د(س)]^{ن} \cdot د'(س)\ دس = \frac{[د(س)]^{ن+1}}{ن+1} + جـ \qquad \text{حيث } ن \neq -1$$

أمثلة : جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1)\ \int 6س\ (3س^2-1)^5\ دس = \frac{(3س^2-1)^6}{6} + جـ = \frac{1}{6}(3س^2-1)^6 + جـ$$

(لاحظ أن (6س) هي مشتقة داخل القوس (3س^2-1)

$$2)\ \int 2س \sqrt{س^2 - 5}\ دس = \int 2س\ (س^2-5)^{\frac{1}{2}}\ دس$$

$$= \frac{(س^2-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + جـ$$

$$= \frac{2}{3}(س^2-5)^{\frac{3}{2}} + جـ$$

$$3)\ \int \frac{(3س^2+5)\ دس}{(س^3+5س)^{\frac{2}{5}}} = \int (س^3+5س)^{-\frac{2}{5}}\ (3س^2+5)\ دس$$

$$= \frac{(س^3+5س)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + جـ$$

$$= \frac{5}{3}(س^3+5س)^{\frac{3}{5}} + جـ$$

٤) $\int (\text{٣س}-٥)(\text{٣س}^{٢}-\text{١٠س})^{-٣}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{٢} \times ٢\,(\text{٣س}-٥)(\text{٣س}^{٢}-\text{١٠س})^{-٣}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{٦س}-١٠)(\text{٣س}^{٢}-\text{١٠س})^{-٣}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{٣س}^{٢}-\text{١٠س})^{-٢}}{-٢} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٤\,(\text{٣س}^{٢}-\text{١٠س})^{٢}} + \text{جـ}$

٥) $\int ٤(\text{س}^{٢}-٢)(\text{س}^{٣}-\text{٦س}-١٤)^{\frac{١}{٤}}\,\text{ءس}$

(لاحظ أن مشتقة داخل القوس هي $(\text{٣س}^{٢}-٦)=٣(\text{س}^{٢}-٢)$ بينما المتوفر هو $٤(\text{س}^{٢}-٢)$ أي أن المطلوب ٣ لذا نضرب في٣ ونقسم على ٣، أما ٤ فهي زائدة فنخرجها خارج التكامل)

$\int ٤(\text{س}^{٢}-٢)(\text{س}^{٣}-\text{٦س}-١٤)^{\frac{١}{٤}}\,\text{ءس} = \frac{٤}{٣}\int ٣(\text{س}^{٢}-٢)(\text{س}^{٣}-\text{٦س}-١٤)^{\frac{١}{٤}}\,\text{ءس}$

$= \frac{٤}{٣} \times \frac{(\text{س}^{٣}-\text{٦س}-١٤)^{\frac{٥}{٤}}}{\frac{٥}{٤}} + \text{جـ}$

$= \frac{٤}{٣} \times \frac{٤}{٥}(\text{س}^{٣}-\text{٦س}-١٤)^{\frac{٥}{٤}} + \text{جـ}$

$= \frac{١٦}{١٥}(\text{س}^{٣}-\text{٦س}-١٤)^{\frac{٥}{٤}} + \text{جـ}$

أمثلة متنوعة: جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{ن}^{-٧}\, \text{ءن} = \dfrac{\text{ن}^{-٦}}{-٦} + \text{جـ} = \dfrac{-١}{٦}\, \text{ن}^{-٦} + \text{جـ} = \dfrac{-١}{٦\, \text{ن}^{٦}} + \text{جـ}$

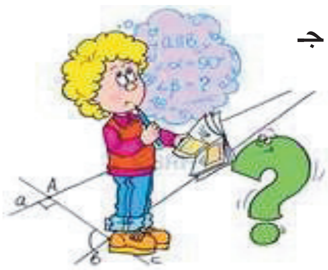
٢) $\int \sqrt{\text{س}}\, \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \mathbf{\dfrac{٢}{٣}}\, \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

٣) $\int \dfrac{٥}{٣}\, \text{س}^{\frac{١}{٣}}\, \text{ءس} = \dfrac{٥}{٣} \times \dfrac{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ} = \dfrac{٥}{٣} \times \dfrac{٣}{٤}\, \text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \dfrac{٥}{٤}\, \text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$ **[حول الأس الكسري إلى جذر]**

٤) $\int (٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣)\, \text{ءس} = ٦\times \dfrac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٤\times \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س} + \text{جـ}$

$= ٢\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + \text{جـ}$



٥) $\int (\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٥)^{٢}(٢\text{س} + ٣)\, \text{ءس} = \dfrac{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٥)^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

$= \dfrac{١}{٣}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٥)^{٣} + \text{جـ}$

٦) $\int \dfrac{٦\text{س}\, \text{ءس}}{(٣\text{س}^{٢} + ٥)^{٧}} = \int ٦\text{س}\, (٣\text{س}^{٢} + ٥)^{-٧}\, \text{ءس}$

$= \dfrac{(٣\text{س}^{٢} + ٥)^{-٦}}{-٦} + \text{جـ} = \dfrac{-١}{٦(٣\text{س}^{٢} + ٥)^{٦}} + \text{جـ}$

٧) $$\int \frac{(\text{٢س}+٤)}{(\text{س}+٢)^{٥}}\,\text{ءس} = \int \frac{٢(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)^{٥}}\,\text{ءس}$$

$$= ٢\int \frac{١}{(\text{س}+٢)^{٤}}\,\text{ءس}$$

$$= ٢\int (\text{س}+٢)^{-٤}\,\text{ءس} = ٢\times \frac{(\text{س}+٢)^{-٣}}{-٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-٢}{٣}(\text{س}+٢)^{-٣} + \text{جـ} = \frac{-٢}{٣(\text{س}+٢)^{٣}} + \text{جـ}$$

٨) $$\int (\text{٢س}^{٣}+\text{٦س}+٥)^{-\frac{١}{٣}}(\text{س}^{٢}+١)\,\text{ءس} = \frac{١}{٦}\int ٦(\text{٢س}^{٣}+\text{٦س}+٥)^{-\frac{١}{٣}}(\text{س}^{٢}+١)\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٦}\times \frac{(\text{٢س}^{٣}+\text{٦س}+٥)^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٦}\times\frac{٣}{٢}(\text{٢س}^{٣}+\text{٦س}+٥)^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤}(\text{٢س}^{٣}+\text{٦س}+٥)^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

٩) $$\int (\text{س}^{٢}-٥)^{٢}\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{٤} - \text{١٠س}^{٢} + ٢٥)\,\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{٥}}{٥} - ١٠\times\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{٢٥س} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} - \frac{١٠}{٣}\text{س}^{٣} + \text{٢٥س} + \text{جـ}$$

تمارين (٤-١)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{ىس}$

٢) $\int \dfrac{\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١)^{-\frac{٢}{٣}}}\ \text{ىس}$

٣) $\int \dfrac{\text{س}^{٥} - \text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + ٢٥\text{س}}{\text{س}^{٣}}\ \text{ىس}$

٤) $\int (٥ - ٤\text{س})^{٥}\ \text{ىس}$

٥) $\int \dfrac{٣\text{س}\ \text{ىس}}{(\text{س}^{٢} - \text{ب}^{٢})^{\frac{١}{٣}}}$

٦) $\int ٩(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢)^{\frac{٧}{٢}}\ \text{ىس}$

٧) $\int \dfrac{٣\text{س} + ١٢}{(\text{س} + ٤)^{٦}}\ \text{ىس}$

٨) $\int \dfrac{(١ + \text{س})^{٢}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ىس}$

٩) $\int (٣\text{س}^{\frac{١}{٣}} + ١)^{٢}\ \text{ىس}$

١٠) $\int \frac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ٤} \, \text{ءس}$

١١) $\int (٤\text{س}^{٣} - ٣\text{س})(\text{س} + ٢) \, \text{ءس}$

١٢) $\int \sqrt{\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س} + ٢٥} \, \text{ءس}$

١٣) $\int ٩(٤\text{س}^{٢} - ١)\sqrt[٣]{٤\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س} + ٥} \, \text{ءس}$

١٤) $\int (٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٣)^{-\frac{١}{٢}} (٤\text{س} - ٢) \, \text{ءس}$

١٥) $\int \sqrt[٣]{٩ - \text{س}} \, \text{ءس}$

١٦) $\int \frac{١ - ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٤}} \, \text{ءس}$

١٧) $\int ٣\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ١) \, \text{ءس}$

١٨) $\int \sqrt{\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$

١٩) $\int (١٠\text{س} - ٢)\sqrt{٥\text{س} - ١} \, \text{ءس}$

٢٠) $\int \text{س}^{٣}\left(١ - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} \, \text{ءس}$

الفهرست


تمت بحمد الله