المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد رسول الله وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد ...

فإن لجنة الرياضيات في دائرة التعليم االديني والدراسات الإسلامية في ديوان الوقف السنّي في جمهورية العراق تهنئ طلبتنا الأعزاء بالعام الدراسي الجديد وتقدم لهم الطبعة الخامسة من كتاب الرياضيات للصف الثاني المتوسط. وهي إذ تشيد بجهود الأستاذين الفاضلين مؤلفَي الكتاب، فإنه يسعدها أن تقدم بتواضع بالغ إضافات ترى أنها ضرورية لإثراء الكتاب وإخراجه بشكل أفضل وتساعد على حصول الفائدة المتوخاة منه والنهوض بالمستوى العلمي لطلبة المدارس الإسلامية. وقد تمثلت هذه الإضافات والتغييرات في تغيير شكل وحجم الطباعة وإدخال الألوان في إخراج الكتاب وكتابة القوانين والملاحظات بخط أكبر وأوضح وضمن إطار ملون، وإثراء فصول الكتاب جميعاً بأمثلة محلولة، وأسئلة متنوعة. وقد حرصنا على الاستمرار في نهجنا في تعريف طلبتنا الأعزاء بعلماء المسلمين القدماء الذين كان لهم الفضل في تطوير علم الرياضيات والهندسة، والذي شرعنا به منذ الصف الأول الذي ضمّ نبذة عن الخوارزمي، أما عالِمنا في الصف الثاني فهو (ابن الهيثم).

ندعو الله أن ينتفع طلبتنا بما يتعلمون ويتقبل منّا ومنهم صالح الأعمال ويغفر لنا ولهم الزلل والخطأ ويكتبنا عنده في الصالحين المصلحين، ويهدينا بهديه لما يحبه ويرضاه ...

۞ **إِنَّ رَبِّي قَرِيبٌ مُجِيبٌ** ۞ هود: ٦١

لجنة تقويم منهج الرياضيات

في

دائرة التعليم الديني والدراسات الإسلامية

دور علماء المسلمين في الرياضيات

ابن الهيثم

(٩٦٥-١٠٣٩م)

هو **أبو علي الحسن بن الهيثم البصري** (٩٦٥-١٠٣٩ م) ، لقب بالبصري نسبة إلى مدينة البصرة. وهو عالم عربي في الرياضيات والبصريات والهندسة والفلك وله العديد من المؤلفات والمكتشفات العلمية التي أكدها العلم الحديث.

مولده ونشأته:

ولد **ابن الهيثم** في البصرة سنة ٣٥٤هـ/٩٦٥م في عصر كان يشهد ازدهاراً في مختلف العلوم، وهناك انكبّ على دراسة الهندسة والبصريات وقراءة كتب من سبقوه من علماء اليونان والعالم الأندلسي الكبير **الزهراوي** وغيرهم في هذا المجال، كتب في تلك العلوم عدة رسائل وساهم في وضع القواعد الرئيسة لها.
درس في بغداد الطب وتخصص في طب العيون، ثم سافر إلى مصر وبقي فيها حتى توفي سنة (١٠٣٩م) وقد اتخذ هناك مهنة نسخ الكتب العالمية مورداًٍ للرزق، إضافةً إلى الترجمة فقد كان متمكناً من لغات عدة. وقد اعتمد **ابن الهيثم** في بحوثه على منهجي الاستقراء والاستنباط وفي الحالتين كان يعتمد على التجربة والملاحظة.

مؤلفاته:

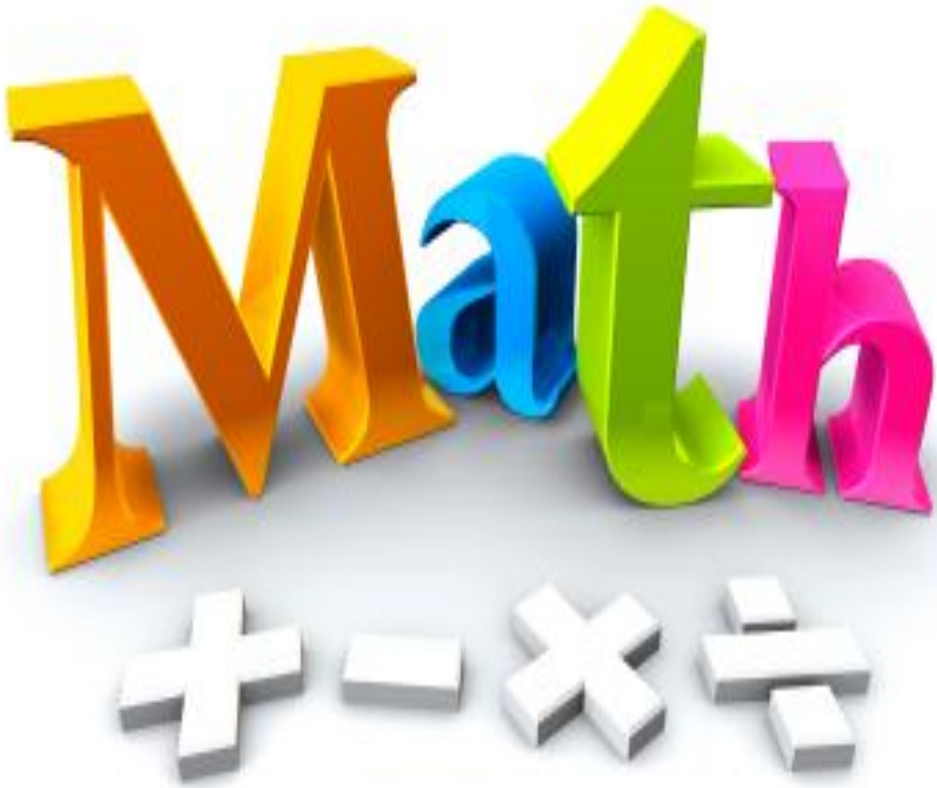
له رسائل كثيرة وما يقرب من (٢٠٠) كتاب في الهندسة والطبيعيات والفلك والحساب والجبر والطب والمنطق والأخلاق والفيزياء، منها (٢٥) كتاباً في الرياضيات والعلوم التعليمية. ومن مؤلفاته **(كتاب المناظر)** الذي يعدُّ ثورة في عالم البصريات، فقد دحض فيه عدداً من نظريات بطليموس في علم الضوء، بعدما توصل إلى نظريات جديدة أصبحت نواة علم البصريات الحديث. ومن أهم الآراء الواردة في هذا الكتاب أنه نسف نظرية بطليموس في أن الرؤية تتم بواسطة أشعة تنبعث من العين إلى الجسم المرئي، فبيَّن **ابن الهيثم** أن الرؤية تتم بواسطة الأشعة التي تنعكس من الجسم المرئي باتجاه عين المبصر. كما

بيَّن أن الشعاع الضوئي ينتشر في خط مستقيم ضمن وسط متجانس، واكتشف ظاهرة انعكاس الضوء، وظاهرة انعطاف الضوء.

ومن مؤلفاته أيضاً رسالة في مساحة القطع المكافئ ، ومقالة في تربيع الدائرة ، ورسالة في خواص المثلث من جهة العمود، ورسالة في القول المعروف بالغرب في حساب المعاملات، وقول في مساحة الكرة، وكتاب الجامع في أصول الحساب، وكتاب في تحليل المسائل الهندسية، ومقالة في التحليل والتركيب.

تأثيره في العلم الحديث:

أرسى **ابن الهيثم** أساسيات علم العدسات، وشرّح العين تشريحاً كاملاً، وبيَّن وظيفة كل قسم منها. وهو أول من قام بتجارب الكاميرا Camera وهو الاسم المشتق من الكلمة العربية (قُمْرة) وتعني الغرفة المظلمة بشباك صغير. ويعتبر **كتاب المناظر** المرجع الأهم الذي استند عليه علماء العصر الحديث في تطوير التقنية الضوئية.


Math

الفصل الأول

المجموعات والعمليات عليها

(١–١) المجموعات وطرق التعبير عنها

١– المجموعة ومفاهيم متعلقة بها:

تعرفت في دراستك السابقة على المجموعة بأنها تجمع لأشياء تربطها صفة أو صفات مشتركة معرَّفة تعريفاً تاماً. وتعرفت أيضاً على رموز مهمة في المجموعات منها الرمز $\ni$ **(ينتمي)** وعكسه الرمز $\not\ni$ **(لا ينتمي)** ، وتستخدم هذه الرموز بين العنصر والمجموعة مثل:

٣ $\ni$ { ٣ ، ٤ ، ٥ }،

السبت $\ni$ مجموعة أيام الأسبوع

بينما ٧ $\not\ni$ { ٣ ، ٤ ، ٥ }،

محرم $\not\ni$ مجموعة أشهر السنة الميلادية.

كذلك تعرفنا على الرمز $\supseteq$ **(محتواة)** أو **(مجموعة جزئية من)**

وعكسه الرمز $\not\supseteq$ **(غير محتواة)** أو **(ليست مجموعه جزئية من)**

ويستخدم هذان الرمزان بين المجموعات (بين مجموعة ومجموعة أخرى) مثل:

{ رمضان ، شوال } $\supseteq$ مجموعة أشهر السنة الهجرية،

وكذلك { ٠ ، ١ } $\supseteq$ { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }،

{ إدريس ، يحيى } $\not\supseteq$ مجموعة أولي العزم من الرسل،

وكذلك { ١ ، ٢ } $\not\supseteq$ { ٢ ، ٣ ، ٤ }

وكذلك تعرفت على **(المجموعة المنتهية)** وهي المجموعة التي يمكن عدّ عناصرها (يمكن معرفة عدد عناصرها) مثل: مجموعة أركان الإسلام ، ومجموعة أوقات الصلوات المكتوبة، ومجموعة أيام الأسبوع، ومجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ١٠٠٠، ومجموعة طلاب مدرستك... إلخ.

أما المجموعة التي لا يمكن عدّ عناصرها فتسمى **(مجموعة غير منتهية)** مثل: مجموعة الأعداد الطبيعية **ط** = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } ، ومجموعة الأعداد الصحيحة **ص** = { ... ، –٣ ، –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } ، ... إلخ.

وكذلك تعرفت على **المجموعة الخالية** ورمزها $\varnothing$ أو **{ }** وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر، مثل مجموعة الأقطار العربية الموجودة في قارة أوربا، ومجموعة الصلوات المكتوبة التي عدد

ركعاتها أكثر من أربع ركعات، ومجموعة الأعداد السالبة التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية.

وعرفت أن المجموعة الخالية ∅ مجموعة جزئية من أية مجموعة أخرى.

وتعرفت على مفهوم تساوي المجموعات، فيقال أن المجموعة س = المجموعة ص ، إذا كان كل عنصر في المجموعة س ينتمي إلى المجموعة ص وكذلك كل عنصر في المجموعة ص ينتمي إلى المجموعة س. أي أن س ⊆ ص ، ص ⊆ س ، ويمكن التعبير عنها :

(إذا كان س ⊆ ص ، ص ⊆ س فإن س = ص)

أو تكون المجموعتان س ، ص متساويتين إذا احتوتا على العناصر نفسها.

أمثلة: ١) إذا كانت س = { محمد ، نوح ، عيسى ، موسى ، إبراهيم } ،

ص = مجموعة أولي العزم من الرسل.

فنلاحظ أن المجموعتين س ، ص تحتوي كل منهما على نفس عناصر المجموعة الأخرى، لذا فإن:

س = ص

٢) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ١ ، ٤ ، ٢ ، ٣ } ، فإن س = ص لاحتوائهما على العناصر نفسها.

٣) إذا كانت س = { أحمد ، سالم ، مروان } ، ص = { مروان ، سالم، كاظم } ،

لاحظ أن أحمد ∈ س ، لكن أحمد ∉ ص ، لذا فإن س ≠ ص

وكذلك يمكن القول أن كاظم ∈ ص ، لكن كاظم ∉ س ، لذا فإن س ≠ ص

٤) إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ٢ ، ٣ } ،

فنلاحظ أن ١ ∈ س ، لكن ١ ∉ ص ، وعليه فإن س ≠ ص

تمارين (١ – ١)

١) اذكر عناصر المجموعات الآتية ثم حدّد المجموعات المنتهية، والمجموعات غير المنتهية، والمجموعات الخالية منها:

أ) مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من (٦) .

ب) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المحصورة بين (−٣) و (٣).

جـ) مجموعة المضاعفات الموجبة للعدد (٥) الأصغر من (٣٠) .

د) مجموعة العوامل الموجبة للعدد (١٢).

هـ) مجموعة الأعداد الأولية.

و) مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين (٤) و (٥).

ز) مجموعة الخلفاء الراشدين ψ.

٢) قال تعالى:﴿ رَبِّي أَمَدًا (٢٥) عَالِمُ الْغَيْبِ فَلَا يُظْهِرُ عَلَى غَيْبِهِ أَحَدًا (٢٦) إِلَّا مَنِ ارْتَضَى مِنْ رَسُولٍ فَإِنَّهُ ﴾ [الكهف: ١٠٩]

فهل مجموعة (كلمات ربي) منتهية أو غير منتهية ؟

٣) عيِّن العبارة الصحيحة والعبارة الخاطئة من العبارات الآتية:

أ) { خديجة ، عائشة } ⊇ مجموعة زوجات النبي محمد ρ.

ب) { العراق ، الأردن } ⊇ مجموعة الدول الأفريقية.

جـ) مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين (٠) و (٢) = ∅.

د) ٣ ∋ { ٣١ ، ٤ ، ٥ ، ٢ }.

هـ) مجموعة العوامل الموجبة للعدد (٩) = { ١ ، ٣ ، ٩ }.

و) { التوراة ، الزبور } ∋ مجموعة الكتب السماوية.

٤) إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ضع أحد الرموز (∋ ، ∌ ، ⊇ ، ⊉) في الفراغ كي تكون العبارات الآتية صحيحة:

أ) س .... ص   ب) ص .... س   جـ) { ٢ ، ٣ } .... س

د) ٧ .... ص   هـ) ٣ .... س   و) ∅ .... ص

٢- طرق التعبير عن المجموعة

يمكن التعبير عن المجموعة بإحدى الطريقتين:

أ- طريقة القائمة (الحصر): ويتم ذلك بوضع عناصرها بين القوسين **{ }** مع وضع الفارزة (،) بين كل عنصر والعنصر الذي يليه.

وتمثل المجموعة بتسجيل عناصرها داخل منحنٍ مغلق بسيط يسمى "**شكل فن**".

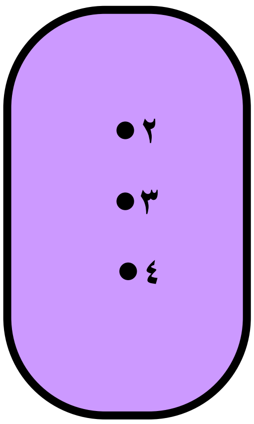
أمثلة: عبّر عن المجموعات الآتية بطريقة القائمة (الحصر)، ومثّلها بأشكال فن:

١) س = مجموعة الصلوات الجهرية.

الحل: س = **{** صلاة الفجر ، صلاة المغرب ، صلاة العشاء }

٢) ص= مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين (١) و(٥).

الحل: ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ }



والآن لو أردنا التعبير عن المجموعة ع = مجموعة الكسور الاعتيادية المحصورة بين (٥) و(٦) فإننا لا نستطيع التعبير عن هذه المجموعة بالطريقة أعلاه لأننا لا نستطيع تسجيل كل الكسور بين (٥) و(٦) ضمن مجموعة مثل المجاميع في الأمثلة أعلاه، لذا نلجأ إلى طريقة ثانية للتعبير عن المجموعة وهي:

ب- طريقة الصفة المميزة: وهي طريقة تذكر فيها صفة تميز المجموعة عن بقية المجموعات الأخرى. وذلك بوضع تعريف يميز عناصر المجموعة داخل القوسين **{ }** ويكتب هذا التعريف بتعابير لفظية، أو رموز رياضية ، أو الجمع بين هذين الأسلوبين. فالمجموعة ع في المثال السابق يمكن التعبير عنها بالآتي:

ع = { س : س كسر اعتيادي محصور بين ٥ ، ٦ } (تعبير لفظي)

أو ع = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ صفر ، ٥ < $\frac{أ}{ب}$ < ٦ } (رموز رياضية)

أمثلة: أ- عبّر عن المجموعات الآتية بطريقة الصفة المميزة:

١) س = مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ١٠

الحل: س = { أ : أ ∈ ط ، أ < ١٠ }

أو س = { أ : أ عدد طبيعي أصغر من ١٠ }

٢) ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ١٠٠ }

الحل: نلاحظ أن عناصر هذه المجموعة هي أعداد صحيحة موجبة أصغر أو تساوي ١٠٠ وعليه يمكن التعبير عنها بالآتي:

ص = { ب : ب ∈ $ص^{+}$ ، ب ≤ ١٠٠ }

أو ص = { ب : ب ∈ ط ، صفر < ب ≤ ١٠٠ }

٣) ع = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ }

الحل: لو تفحصنا عناصر هذه المجموعة نجد أن هذه العناصر جميعها هي أعداد أولية وعليه يمكن القول إن:

ع = { هـ : هـ عدد أولي ، هـ ≤ ١١ }

أو ع = { هـ : هـ عدد أولي ، هـ < ١٢ }

٤) ل = { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ... }

الحل: لو تفحصنا عناصر هذه المجموعة لوجدنا أن كلاً منها كسر اعتيادي مكون من العدد (١) في البسط وفي المقام الأعداد (١ ، ٢ ، ٣ ، ...) أعداد صحيحة موجبة وعليه يمكن التعبير عن المجموعة بالآتي:

ل = { $\frac{١}{\text{أ}}$: أ ∈ ص^{+} }

أو ل = { $\frac{١}{\text{ب}}$ ، ب ∈ **ط** ، ب > صفر }

لاحظ أننا في الأمثلة السابقة جميعها استطعنا أن نعبر عن كل مجموعة بأكثر من أسلوب، أي أنه:

لا توجد صيغة أو أسلوب محدد للتعبير عن المجموعة بطريقة الصفة المميزة.

ب- عبّر عن المجموعات الآتية بطريقة القائمة (الحصر):

١) س = { أ : أ ∈ **ط** ، ٣ < أ ≤ ٧ }

الحل: لاحظ (من التعريف) أن عناصر هذه المجموعة هي أعداد طبيعية محصورة بين (٣) و(٨)

وبذلك يمكن التعبير عنها بالآتي:

س = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

٢) ص = { هـ : هـ رقم من أرقام العدد (٤٤٣١١٩٠٢٩) }

الحل: ص = { ٩ ، ٢ ، ٠ ، ١ ، ٣ ، ٤ }

٣) ع = { د : د حرف من أحرف كلمة (زلزال) }

الحل: ع = { ز ، ل ، ا }

تمارين (١ – ٢)

١) عبّر عن المجموعات الآتية بذكر عناصرها (طريقة القائمة):

أ) مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من (٧).

ب) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المحصورة بين (−٣) و (٦).

جـ) مجموعة المضاعفات الموجبة للعدد (٥).

د) س = { د : د رقم من أرقام العدد (٥٣٠٠٤٣) } .

هـ) ص = { ب : ب = ٢أ + ١ ، أ = ٢ ، ٤ ، ٥ } .

٢) عبّر عن المجموعات الآتية بذكر الصفة المميزة لها:

أ) ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٥١ } .

ب) ل = { −٤ ، −٣ ، −٢ ، ... ، ١٠٠ } .

جـ) م = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ... } .

د) هـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } .

(١ – ٣): الفرق بين مجموعتين

إذا كانت س ، ص مجموعتين، فإن الفرق بين س و ص يرمز له بالرمز (س - ص) ويعبر عنه بالآتي:

س - ص = { أ : أ ∈ س ، أ ∉ ص }

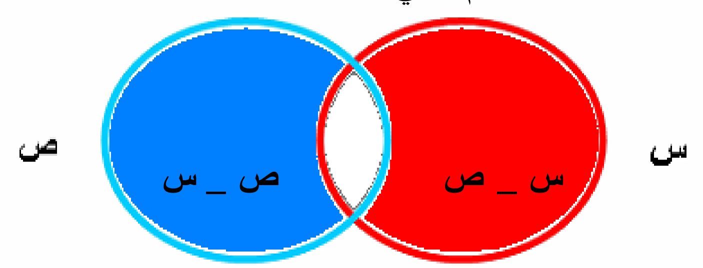
أي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة س ولا تنتمي إلى المجموعة ص.

أما الفرق بين ص و س فيرمز له بالرمز (ص - س) ويعبر عنه بالآتي:

ص - س = { ب : ب ∈ ص ، ب ∉ س }

أي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة ص ولا تنتمي إلى المجموعة س.

ويمكن تمثيل الفرق بين مجموعتين بالرسم الآتي:



مثال١ : إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فإن:

س _ ص = { ١ ، ٢ }

بينما **ص _ س = { ٤ ، ٦ }**

مثال٢ : إذا كانت س = { خالد ، علي ، هاشم } ، ص = { علي ، حسن ، عمر ، أحمد } فإن:

س _ ص = { خالد ، هاشم }

بينما **ص _ س = { حسن ، عمر ، أحمد }**

مثال٣ : إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ١ ، ٠ } فإن:

س _ ص = ∅

وإن **ص _ س = ∅**

لاحظ أن: **س = ص**

ومن الأمثلة أعلاه نستنتج:

> **ملاحظة: عملية الفرق بين المجموعات غير المتساوية عملية غير إبدالية. فإذا كانت س ، ص مجموعتين، وأن س ≠ ص فإن س _ ص ≠ ص _ س**

(١–٤) المجموعة الشاملة والمجموعة المتمّمة

١ – المجموعة الشاملة:

إذا كان لدينا عدد محدود من المجموعات المنتهية فكل مجموعة تحوي هذه المجموعات تسمى **مجموعة شاملة** لها. أي أن كلاً من هذه المجاميع تكون جزئية من المجموعة الشاملة. ويرمز عادة للمجموعة الشاملة بالرمز **ش**.

فلو كانت لدينا المجاميع **س** = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ، **ص** = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } ، **ع** = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ } فإن كلاً من المجاميع الآتية تكون مجموعة شاملة لهذه المجاميع.

ش١ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ١٠ }

ش٢ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٥ }

ش٣ = { أ : أ ∋ ط ، أ ≥ ٢٥ }

ش٤ = ط

(لماذا؟)

ملاحظات:

١) توجد أكثر من مجموعة تصلح أن تكون مجموعة شاملة في السؤال الواحد.

٢) تختلف المجموعة الشاملة من سؤال إلى آخر.

٣) تمثل المجموعة الشاملة عادة بمستطيل يحتوي داخله المنحنيات المغلقة التي تمثل المجموعات الجزئية في السؤال.

٢- المجموعة المتمِّمة:

إذا كانت س مجموعة جزئية من ش فإن **المجموعة المتمِّمة** لها يرمز لها بالرمز $\overline{\text{س}}$ وهي عبارة عن مجموعة الفرق بين **المجموعة الشاملة** والمجموعة س.

أي أن $\overline{\text{س}}$ = ش ـ س = { أ : أ ∈ ش ، أ ∉ س }

مثال: إذا كانت ش = **{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }**

ش

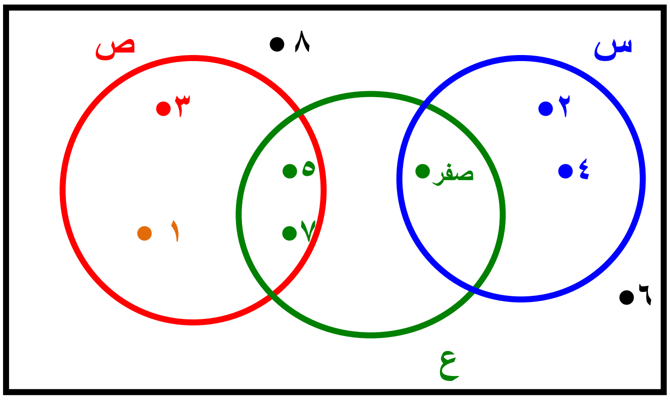
س = **{ ٠ ، ٢ ، ٤ }** ، ص= **{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }**

ع = **{ ٠ ، ٥ ، ٧ }** فإن:

$\overline{\text{س}}$ = ش ـ س = **{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }**

$\overline{\text{ص}}$ = ش ـ ص = **{ ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }**

$\overline{\text{ع}}$ = ش ـ ع = **{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }**



خواص المجموعة المتمِّمة:

إذا كانت س ، ص مجموعتين جزئيتين من ش فإن:

١) $\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = $\overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$

٢) $\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ = $\overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$

(خاصيتا دي مورغان)

٣) $\overline{\overline{\text{س}}}$ = س لأي مجموعة س

٤) س ∩ $\overline{\text{س}}$ = ∅ لأي مجموعة س

٥) ص ∪ $\overline{\text{ص}}$ = ش لأي مجموعة ص

مثال : إذا كانت ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } ،

س = مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية المحصورة بين (٠) و(٧) ،

ص = مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٤ ، ١٠ فجد كلاً من:

١) $\overline{\text{س}}$ ٣) $\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ ٥) س _ ص ٧) $\overline{\text{س}}$ − $\overline{\text{ص}}$

٢) $\overline{\text{ص}}$ ٤) $\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ ٦) $\overline{\text{س} - \text{ص}}$ ٨) $\overline{\text{س}}$ ∪ ص

الحل: س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ص = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

١) $\overline{\text{س}}$ = ش _ س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

٢) $\overline{\text{ص}}$ = ش _ ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

٣) $\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = $\overline{\text{س}}$ ∩ $\overline{\text{ص}}$ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } ∩ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }
= { ١ ، ٣ }

٤) $\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ = $\overline{\text{س}}$ ∪ $\overline{\text{ص}}$ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } ∪ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }
= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

٥) س _ ص = { ٢ ، ٤ }

٦) $\overline{\text{س} - \text{ص}}$ = ش − (س _ ص) = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

٧) $\overline{\text{س}}$ − $\overline{\text{ص}}$ = { ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

٨) $\overline{\text{س}}$ ∪ ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

تمارين (١ - ٤)

١) إذا كانت ش = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، س = { ٠ ، ١ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } فجد:

أ) $\overline{س \cup ص}$ ب) $\overline{س \cap ص}$ ج) $\overline{س}$

د) $\overline{ص}$ هـ) س ـ ص   و) ص ـ س

ز) $\overline{\overline{س}}$

٢) إذا كانت ش= { أ : أ ∈ ص$^+$ ، أ ≥ ١٠ } ، س = { ب : ب عدد أولي أصغر من ١٠}، ص = { ج : ج عدد زوجي ، ٠ < ج < ١٠ } فجد:

أ) $\overline{س - ص}$ ب) $\overline{ص - س}$ ج) $\overline{س} \cap \overline{ص}$

٣) إذا كانت ش = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ، س = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٦ } فجد:

أ) س ـ ص   و) $\overline{س \cup ص}$

ب) ص ـ س   ز) $\overline{س \cap ص}$

ج) $\overline{س} - \overline{ص}$ ح) $\overline{س} \cap س$

د) $\overline{ص} - \overline{س}$ ط) ص $\cup$ $\overline{ص}$

هـ) $\overline{س - ص}$ ي) $\overline{س} \cup \overline{\overline{ص}}$

رياضيات مسلية

كيف توزع الأعداد من (١) إلى (٩) على مربعات الجدول الآتي بحيث يكون مجموع أي صف أو عمود أو قطر فيه (١٥)؟

؟	؟	؟
؟	؟	؟
؟	؟	؟

الفصل الثاني
العلاقات

لمعرفة العلاقات نحتاج إلى معرفة الزوج المرتب ومجموعة حاصل الضرب الديكارتي.

الزوج المرتب:

هو عبارة عن زوج من العناصر تفصلهما فارزة (،) ويحصران بين قوسين صغيرين. مثل الزوج المرتب **(أ ، ب)**. ويسمى أ **المسقط الأول**، ويسمى **ب** **المسقط الثاني**.

والزوج المرتب **(أ ، ب)** يعني أن **أ** يرتبط مع **ب**. ويسمى بـ**(الزوج المرتب)**، لأن الترتيب مهم ومؤثر، فالزوج (أ ، ب) يختلف عن الزوج (ب ، أ).

حاصل الضرب الديكارتي:

هو عبارة عن مجموعة الأزواج المرتبة التي تمثل كافة الارتباطات الممكنة بين العناصر التي تنتمي إلى مجموعةٍ ما، أو بين عناصر مجموعتين. ويرمز له بالرمز **X** .

أمثلة:

إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ }   ، ص = { ٢ ، ٣ } فإن:

١) س X س = { (٠ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) }

٢) ص X ص = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

٣) س X ص = { (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) }

(هنا يجب أن يكون المسقط الأول للزوج المرتب ينتمي إلى المجموعة س، والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة ص).

٤) ص X س = { (٢ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) }

(هنا يجب أن يكون المسقط الأول للزوج المرتب ينتمي إلى المجموعة ص، والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة س).

(٢-١) العلاقة على المجموعة

هي أية مجموعة جزئية من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة. فإذا كانت س مجموعة، فإن أية مجموعة جزئية من المجموعة س X س تمثل علاقة معرَّفة على المجموعة س.

ملاحظة:

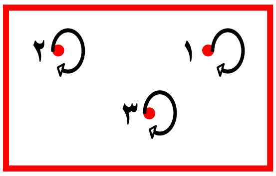
تمثل العلاقة على مجموعةٍ ما بمخطط سهمي، وذلك برسم شكل فن للمجموعة ثم تمثيل الأزواج المرتبة. ويمثل الزوج المرتب بسهم ينطلق من المسقط الأول للزوج المرتب باتجاه المسقط الثاني له، وإذا كان العنصر يرتبط مع نفسه فيمثل الزوج المرتب بسهم متحرك حول العنصر ( ) ويسمى **(عقدة)** أو **(عروة)**.

مثال١ : إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } فإن:

س X س = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

فلو أخذنا المجموعة ع١ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) } نلاحظ أن ع١ ⊆ س X س

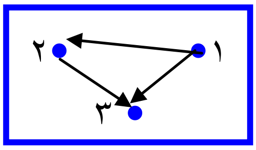
لذا فإن ع١ تمثل علاقة معرَّفة على المجموعة **س**. ومن الواضح أن العلاقة ع١ هي علاقة **(يساوي)**، ويمكن تمثيلها بمخطط سهمي كالآتي:



ع١

ولو أخذنا المجموعة ع٢ = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) } نلاحظ أن ع٢ ⊆ س X س

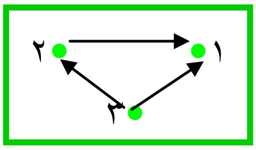
لذا فإن ع٢ تمثل علاقة معرَّفة على المجموعة **س**. وهذه العلاقة تسمى علاقة **(أصغر من)**، ويمكن تمثيلها بمخطط سهمي كالآتي:



ع٢

ولو أخذنا المجموعة ع٣ = { (٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) } نلاحظ أن ع٣ ⊆ س X س

لذا فإن ع٣ تمثل علاقة معرَّفة على المجموعة **س**. وهذه العلاقة تسمى علاقة **(أكبر من)**، ويمكن تمثيلها بمخطط سهمي كالآتي:



ع٣

ملاحظة: إن الفارزة في الزوج المرتب تعني **(اسم العلاقة)**.

مثال٢ : إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }، اكتب كلاً من العلاقات الآتية بطريقة الحصر، ثم مثّلها بمخططات سهمية:

ع١ : علاقة (**نصف**) المعرّفة على **س**.

ع٢ : علاقة (**ربع**) المعرّفة على **س**.

ع٣ : علاقة (**ينقص بمقدار ٢**) المعرَّفة على **س**.

ع٤ : علاقة (**ثلاثة أمثال**) المعرَّفة على **س**.

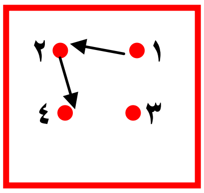
ع٥ : علاقة (**ضعف**) المعرّفة على **س**.

الحل:

هنا يجب أن يكون المسقط الأول للزوج المرتب **نصف** المسقط الثاني. وعليه فإن:

ع١ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) }

ويمكن تمثيل ع١ بالمخطط السهمي الآتي:

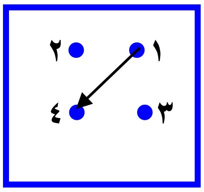


ع١

أما بالنسبة لـ ع٢ فيجب أن يكون المسقط الأول للزوج المرتب **ربع** المسقط الثاني. وعليه فإن:

ع٢ = { (١ ، ٤) }

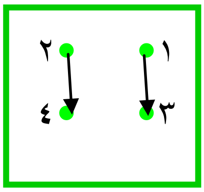
ويمكن تمثيلها بالمخطط السهمي الآتي:



ع٢

و بالنسبة لـ ع٣ فيجب أن يكون المسقط الأول للزوج المرتب **ينقص باثنين عن** المسقط الثاني. وعليه فإن: ع٣ = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) }

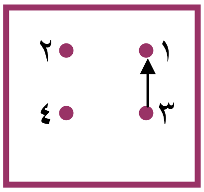
ويمكن تمثيلها بالمخطط السهمي الآتي:



ع٣

وبالنسبة لـ ع٤ فيجب أن يكون المسقط الأول للزوج المرتب **ثلاثة أمثال** المسقط الثاني. وعليه فإن:

ع٤ = { (٣ ، ١) } ويمكن تمثيلها بالمخطط السهمي الآتي:

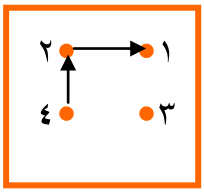


ع٤

وبالنسبة لـ ع٥ فيجب أن يكون المسقط الأول للزوج المرتب **ضعف** المسقط الثاني. وعليه فإن:

ع٥ = { (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) }

ويمكن تمثيلها بالمخطط السهمي الآتي:



ع٥

(٢–٢)خواص العلاقات على المجموعة

١- خاصية الانعكاس:

العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة س تكون **انعكاسية** إذا كان لكل أ ∋ س فإن الزوج المرتب (أ ، أ) ∋ ع. أي أن كل عنصر في المجموعة س يجب أن يرتبط مع نفسه بالعلاقة ع.

وإذا وجد عنصر واحد في الأقل لا يحقق الشرط أعلاه (لا يرتبط مع نفسه) فإن العلاقة غير انعكاسية.

ويمكن معرفة خاصية الانعكاس للعلاقة من المخطط السهمي لها، إذ يجب أن يكون عند كل عنصر في المجموعة عقدة أو عروة في المخطط السهمي للعلاقة.

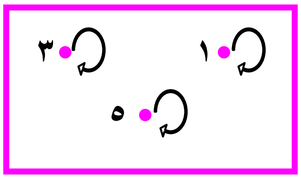
أمثلة:

١) إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ }، اكتب العلاقات الآتية المعرَّفة على س بذكر عناصرها، ومثّلها بمخططات سهمية ثم بيِّن فيما إذا كانت انعكاسية:

ع١: علاقة (يساوي)

الحل: ع١ = { (١ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) }

ع١ علاقة انعكاسية لأن كل عنصر في س ارتبط مع نفسه بهذه العلاقة والمخطط السهمي لها هو:

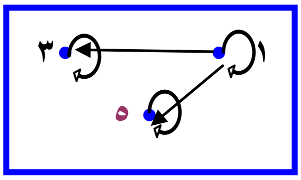


ع١

ع٢: علاقة (عامل من عوامل)

الحل: ع٢ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) }

ع٢ علاقة انعكاسية لأن كل عنصر في س ارتبط مع نفسه بهذه العلاقة ويمكن ملاحظة وجود عقدة (عروة) عند كل عنصر في س . والمخطط السهمي لها هو:

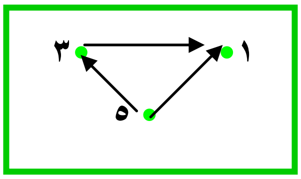


ع٢

ع٣: { (أ ، ب) : أ – ب = عدد موجب ، أ ، ب ∋ س }

الحل: ع٣ = { (٣ ، ١) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) }

ع٣ علاقة غير انعكاسية لأن ١ ∋ س لكن (١ ، ١) ∌ ع٣ والمخطط السهمي لها هو:

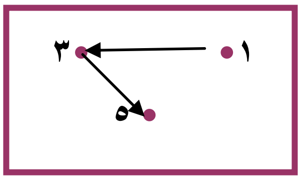


ع٣

الحل: هنا يجب أن يكون المسقط الأول + ٢ = المسقط الثاني للزوج المرتب المنتمي للعلاقة ع٤

ع٤ = { (١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) }

ع٤ علاقة غير انعكاسية لأن ٣ ∈ س لكن (٣ ، ٣) ∉ ع٤ والمخطط السهمي لها هو:



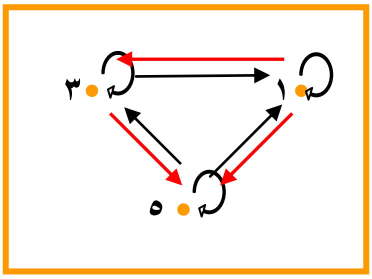
ع٤

ع٥: { (أ ، ب) : أ + ب = عدد زوجي ، أ ، ب ∈ س }

الحل: هنا يجب أن يكون مجموع المسقط الأول والمسقط الثاني عدداً زوجياً.

ع٥ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥) }

ع٥ علاقة انعكاسية لأن كل عنصر من عناصر س ارتبط مع نفسه فيها. والمخطط السهمي لها هو:



ع٥

ملاحظات:

١) إن العلاقتين (يساوي)، (تطابق) انعكاسية على أية مجموعة.

٢) إن علاقة (عامل من عوامل) تكون انعكاسية دائماً على أية مجموعة لا تحوي الصفر.

٣) وجود عنصر واحد في الأقل لا يحقق شرط الانعكاس يكفي لأن تكون العلاقة غير انعكاسية، ولكن إذا أردنا أن نثبت بأنها انعكاسية فالشرط يجب أن يتحقق لكل العناصر.

٢- خاصية التناظر:

العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة س تكون **متناظرة** إذا كان لكل زوج مرتب (أ ، ب) ∋ ع يوجد الزوج المرتب (ب ، أ) ∋ ع أيضاً. وبعبارة أخرى أن كل زوج مرتب ينتمي إلى العلاقة يوجد عكسه ينتمي إلى العلاقة أيضاً. ويمكن معرفة تناظر العلاقة من المخطط السهمي لها، فإذا انطلق سهم من أ إلى ب (أ ← ب) ، يجب أن يوجد سهم راجع من ب إلى أ (ب ← أ).

أمثلة:

١) إذا كانت س ={ ٣ ، ٤ ، ٥ }، ع علاقة معرفة على س حيث إن **ع: علاقة (أصغر أو يساوي)**، اكتب ع على شكل أزواج مرتبة، ثم ارسم المخطط السهمي لها وبيّن نوعها (انعكاسية، متناظرة).

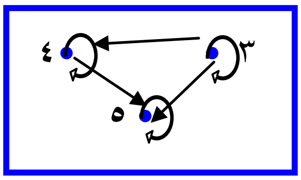
الحل: ع = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

ع علاقة انعكاسية لارتباط كل عنصر من عناصر س مع نفسه (كل عنصر حوله عقدة).

ع علاقة غير متناظرة لأن (٣ ، ٤) ∋ ع بينما (٤ ، ٣) ∌ ع.

ونلاحظ من المخطط السهمي لهذه العلاقة وجود سهم خارج من ٣ إلى ٤ ولا يوجد سهم راجع من ٤ إلى ٣

ع



٢) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }، **ع: علاقة (ضعف)** المعرَّفة على س ، اكتب العلاقة واختبر خاصيتي الانعكاس والتناظر لها مع توضيحها بمخطط سهمي.

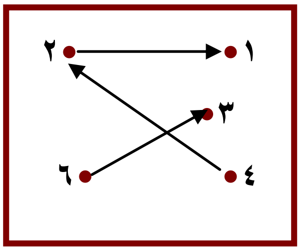
الحل: ع = { (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

ع علاقة غير انعكاسية لأن ١ ∋ س لكن (١ ، ١) ∌ ع

ع علاقة غير متناظرة لأن (٢ ، ١) ∋ ع ، لكن (١ ، ٢) ∌ ع

والمخطط السهمي لها هو:

ع



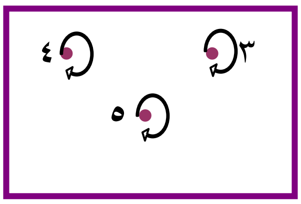
٣) إذا كانت س = { ٣ ، ٥ ، ٧ }، اكتب علاقة (=) المعرَّفة على المجموعة س ، ثم بيّن خاصيتي الانعكاس والتناظر لها مع توضيحها بمخطط سهمي.

الحل: ع = { (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) ، (٧ ، ٧) }

ع علاقة انعكاسية لأن كل عنصر ارتبط مع نفسه.

ع علاقة متناظرة لأن معكوس الزوج المرتب (أ ، أ) هو الزوج المرتب (أ ، أ) نفسه. ومخططها السهمي هو:

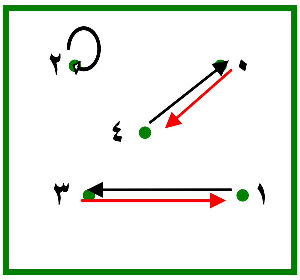
ع



٤) إذا كانت س = { ٤ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠ } ، ع علاقة معرّفة على س بحيث إن:

ع(أ ، ب) ∈ ع إذا كان أ + ب = ٤ لكل أ ، ب ∈ س

اكتب العلاقة ثم بيّن نوعها مع توضيحها بمخطط سهمي.



الحل: ع = { (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢) }

ع علاقة ليست انعكاسية لأن ٣ ∈ س ، بينما (٣ ، ٣) ∉ ع

ع علاقة متناظرة لأن لكل (أ ، ب) ∈ ع يوجد (ب ، أ) ∈ ع

والمخطط السهمي للعلاقة يوضح ذلك.

ملاحظات:

١) إن خاصيتي الانعكاس والتناظر تختص بها العلاقة على المجموعة دون غيرها من العلاقات.

٢) إن علاقة ((يساوي)) هي علاقة متناظرة على أية مجموعة.

٣) إن علاقة ((أكبر)) و((أكبر أو يساوي))، وكذلك علاقة ((أصغر)) و((أصغر أو يساوي)) هي علاقات غير متناظرة على أية مجموعة.

٤) إن علاقة ((عامل من عوامل)) على أية مجموعة هي علاقة غير متناظرة.

٥) إن علاقة ((يزيد)) و((ينقص)) على أية مجموعة هي علاقة غير متناظرة.

(٢–٣) العلاقة من مجموعة إلى أخرى

إذا كانت س ، ص مجموعتين، فإن أية مجموعة جزئية من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي س X ص هي علاقة معرّفة من س إلى ص.

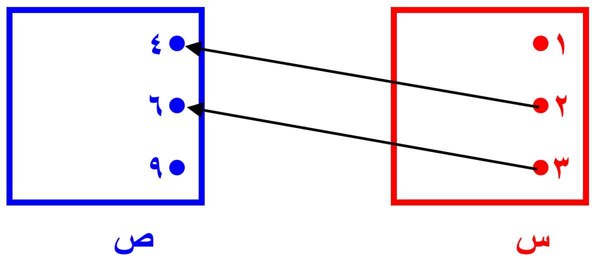
وأية مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي ص X س هي علاقة معرَّفة من ص إلى س.

ويمكن تمثيل العلاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص بمخطط سهمي وذلك بتمثيل كل من المجموعتين س ، ص بشكل فن، ثم تمثيل الأزواج المرتبة بأسهم تبدأ من المسقط الأول (في المجموعة س) إلى المسقط الثاني (في المجموعة ص).

وبالطريقة نفسها يمكن تمثيل العلاقة من المجموعة ص إلى المجموعة س بمخطط سهمي.

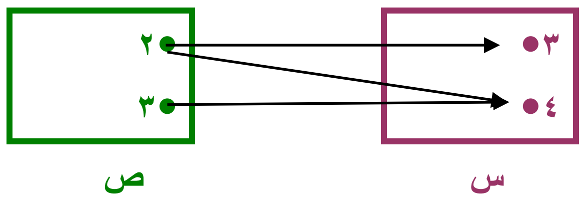
مثال١ : إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص= { ٤ ، ٦ ، ٩ } ، فاكتب العلاقة ع: (نصف) من س إلى ص على شكل أزواج مرتبة، مع تمثيلها بمخطط سهمي.

الحل: ع = { (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }



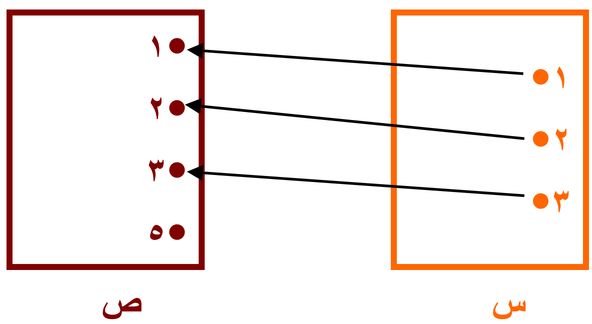
مثال٢ : إذا كانت س= { ٣ ، ٤ } ، ص= { ٢ ، ٣ } ، فاكتب العلاقة ع: (أصغر من) من ص إلى س على شكل أزواج مرتبة، مع تمثيلها بمخطط سهمي.

الحل: ع = { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤) }



مثال٣ : إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ، فاكتب العلاقة ع: (يساوي) من س إلى ص على شكل أزواج مرتبة، مع تمثيلها بمخطط سهمي.

الحل: ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }



تمارين (٢ – ١)

١) إذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، فاكتب:

أ) المجموعة **س X س** ثم مثّلها بمخطط سهمي.

ب) أربع علاقات مختلفة على **س** مع التمثيل بمخططات سهمية.

٢) لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ،اكتب العلاقات الآتية المعرَّفة على س ، ثم مثّلها بمخططات سهمية:

ع١: علاقة (يزيد بثلاثة)   ع٢: علاقة (نصف)

ع٣: علاقة (ضعف)   ع٤: علاقة (ثلاثة أمثال)

ع٥: علاقة (عامل من عوامل)   ع٦: علاقة (ينقص بمقدار ٢)

٣) إذا كانت س = {–٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢} ، ع علاقة على س بحيث إن (أ ، ب) ∋ ع إذا كان أ + ب = صفراً لكل أ ، ب ∋ س. اكتب العلاقة على شكل أزواج مرتبة، ثم ارسم المخطط السهمي لها واختبر خاصيتي الانعكاس والتناظر لتلك العلاقة.

٤) إذا كانت ع = {(س ، ص) : س + ص = ٢ ، س ، ص ∋ ط } . اكتب العلاقة ع بذكر عناصرها ، ثم بيّن نوعها (انعكاسية، متناظرة).

٥) اذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ع علاقة على س بحيث إن (أ ، ب) ∋ ع إذا كان: أ + ب = ٤ لكل أ ، ب ∋ س. اكتب العلاقة على شكل أزواج مرتبة، ثم ارسم المخطط السهمي لها وبيِّن نوعها.

٦) اذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٥ } ، ع علاقة أكبر أو يساوي (≤) على المجموعة س . بيّن أيّ العبارات الآتية صائبة وأيّها خاطئة لكل ممّا يأتي:

١) (٢ ، ٥) ∋ ع   ٩) العلاقة ع غير انعكاسية

٢) (٥ ، ٢) ∋ ع   ١٠) العلاقة ع متناظرة

٣) (٥ ، ٥) ∋ ع   ١١) العلاقة ع غير متناظرة

٤) (٢ ، ٢) ∋ ع   ١٢) العلاقة ع انعكاسية ومتناظرة

٥) (٣ ، ١) ∋ ع   ١٣) العلاقة ع انعكاسيه وغير متناظرة

٦) (١ ، ٣) ∋ ع   ١٤) العلاقة ع غير انعكاسية ومتناظرة

٧) (٢ ، ١) ∋ ع   ١٥) العلاقة ع غير انعكاسية وغير متناظرة

٨) العلاقة ع انعكاسية

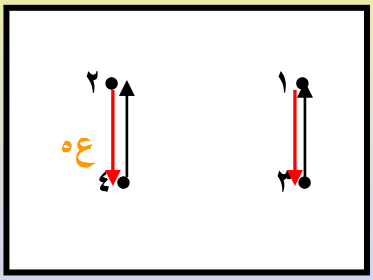
٧) اذا كانت س= { ٢ ، ٤ ، ٦ } بيّن نوع العلاقات الآتية، ثم مثّلها بمخطط سهمي:

ع١ = {(٢ ، ٤)،(٤ ، ٢)،(٢ ، ٢)} ع٤ = {(٢ ، ٢)،(٤ ، ٤)،(٦ ، ٦)}

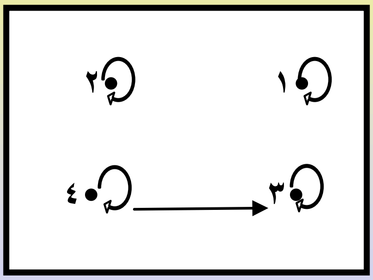
ع٢ = {(٢ ، ٢)،(٤ ، ٤)} ع٥ = {(٢ ، ٢)}

ع٣ = {(٢ ، ٤)،(٤ ، ٢)،(٢ ، ٢)،(٤ ، ٤)} ع٦ = {(٢ ، ٤)،(٤ ، ٢)،(٦ ، ٦)}

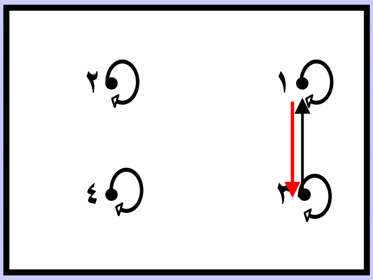
٨) إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، اختبر خاصيتي الانعكاس والتناظر للعلاقات المعرَّفة على المجموعة س من خلال الرسم فقط، ثم اكتب هذه العلاقات بشكل أزواج مرتبة لكل رسم.



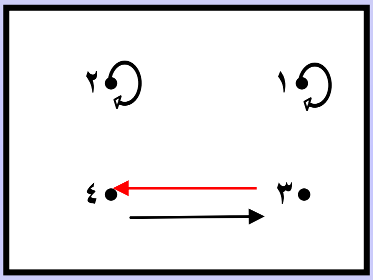
ع١



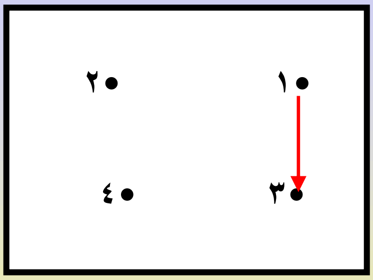
ع٢



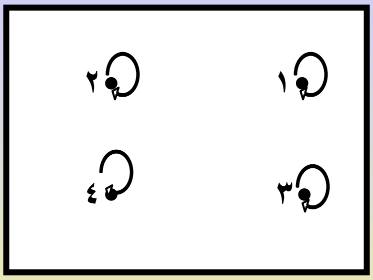
ع٣



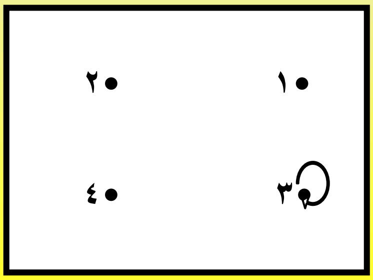
ع٤



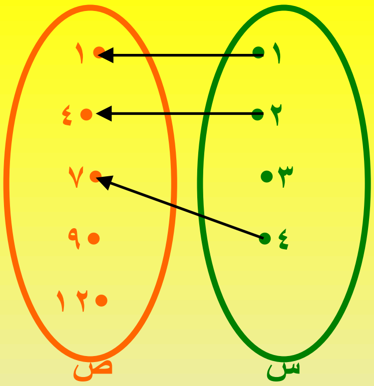
ع٥



ع٦



٩) إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ،
ص= { ١ ، ٤ ، ٧ ، ٩ ، ١٢ } ،
وعرِّفت العلاقة ع من س إلى ص
كما موضح بالمخطط السهمي.
اكتب العلاقة ع بشكل أزواج مرتبة.



١٠) إذا كانت ع هي علاقة (نصف) المعرَّفة من ط (الأعداد الطبيعية) إلى المجموعة س= { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ } . اكتب العلاقة ع بذكر عناصرها ثم مثّلها بمخطط سهمي.

١١) إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } ، ص= { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } . اكتب العلاقات الآتية ثم مثّلها بمخططات سهمية:

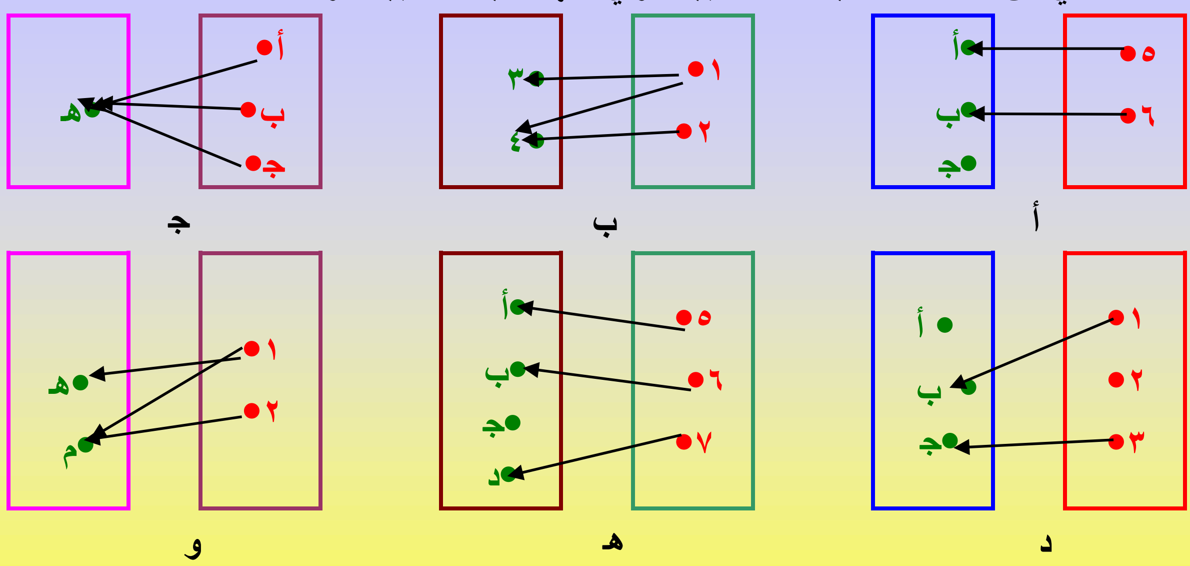
أ) علاقة **(ضعف)** المعرّفة من **س** إلى **ص**

ب) علاقة **(يزيد بواحد)** المعرّفة من **ص** إلى **س**

جـ) علاقة **(ينقص باثنين)** المعرّفة من **س** إلى **ص**

د) علاقة **(عامل من عوامل)** المعرّفة من **ص** إلى **س**

١٢- أي من العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً، وأي منها لا يمثل تطبيقاً؟ ولماذا؟



١٣) اذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ص= { ١ ، ٥ ، ٧ ، ٨ } ، ع علاقة من س إلى ص حيث: ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٥ ، ٧) } ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة، ثم بيِّن هل هي تطبيق؟ ولماذا؟ ثم جد المدى.

١٤) اذا كان ت : س ← ط تطبيقاً ، حيث إن س= { −١ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ } وإن س ← ٢س+ ٣ . **ارسم المخطط السهمي لهذا التطبيق ثم حدّد مجاله ومجاله المقابل ومداه.**

١٥) إذا كانت س = { ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ ، ٢ } وأن التطبيق ق : س ← ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) بحيث ق(س) = س^{٢}. **جد:**

١) ق(٠)   ٢) ق(−١)   ٣) ق(١)   ٤) ق(−٢)   ٥) ق(٢)

ثم جد المدى ومثّله بمخطط سهمي.

١٦) اذا كان ت : س ← ط تطبيقاً حيث إن س ← ٢س^{٢}− ١ ، **س= { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ } ، ط : مجموعة الأعداد الطبيعية . جد مدى التطبيق.**

الفصل الثالث

الأعداد النسبية

(٣-١) العدد النسبي

سبق أن تعرفت على مجموعة الأعداد الطبيعية **ط** = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

وتعرفت على مجموعة الأعداد الصحيحة **ص** = {... ، $^-$٣ ، $^-$٢ ، $^-$١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

إذ أن :

ص$^+$ = { $^+$١ ، $^+$٢ ، $^+$٣ ، $^+$٤ ، $^+$٥ ، ... } هي **مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة** ،

ص$^-$ = { $^-$١ ، $^-$٢ ، $^-$٣ ، $^-$٤ ، $^-$٥ ، ... } هي **مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة** ،

وأن **ص** = ص$^+$ $\cup$ ص$^-$ $\cup$ **{ ٠ }**

كما تعرفت على **الكسور** مثل:

$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٧}$ ، ... إلخ

و **الأعداد الكسرية** مثل:

٢ $\frac{١}{٥}$ ، ٣ $\frac{١}{٧}$ ، ٧ $\frac{٢}{٣}$ ، ٥ $\frac{٤}{٧}$

وهذا العام سنتعرف على الأعداد النسبية التي لا تختلف كثيراً عن الكسور، مثل :

$-$٣ $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ٨ $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{١}{-٥}$ ، ٥ $\frac{-٢}{٣}$ ، ...

كل من الأعداد السابقة يسمى **(عدداً نسبياً)**.وعموماً:

> العدد النسبي:
>
> **هو ما ينتج عن قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر لا يساوي صفراً.**

وبعبارة أخرى:

العدد النسبي: هو كل عدد يمكن وضعه بالصورة: $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ **ص** ، ب ≠ ٠

فالعدد $-٣\frac{١}{٢}$ هو عدد نسبي لأنه يمكن وضعه بالصورة $\frac{-٧}{٢}$ ،

وكذلك العدد ٥ هو عدد نسبي لأنه يمكن وضعه بالصورة $\frac{٥}{١}$ ،

والعدد $٤\frac{٣}{٤}$ أيضاً عدد نسبي لأنه يمكن وضعه بالصورة $\frac{١٩}{٤}$ ،

و ١.٦ هو عدد نسبي أيضاً لأنه يمكن وضعه بالصورة $\frac{٨}{٥}$ **(لماذا؟)**

و− ٢.٤ هو عدد نسبي أيضاً لأنه يمكن وضعه بالصورة $\frac{-١٢}{٥}$ أو $\frac{١٢}{-٥}$ **(لماذا؟)**

و(٠) هو عدد نسبي أيضاً لأنه يمكن وضعه بالصورة $\frac{٠}{١}$ أو $\frac{٠}{٣}$ أو $\frac{٠}{-٢}$ ، ...

سنرمز لـ **مجموعة الأعداد النسبية** بالرمز ن ، و**مجموعة الأعداد النسبية الموجبة** بالرمز $ن^{+}$
و**مجموعة الأعداد النسبية السالبة** بالرمز $ن^{-}$ ، وعليه يكون:

$$ن = ن^{+} \cup ن^{-} \cup \{٠\}$$

ومما تقدم نلاحظ:

١) كل عدد صحيح هو عدد نسبي ولكن العكس ليس صحيحاً.

٢) الصفر عدد نسبي.

٣) $-\frac{أ}{ب} = \frac{-أ}{ب} = \frac{أ}{-ب}$ لأي عدد نسبي $\frac{أ}{ب} \neq$ صفراً

٤) الكسر العشري هو عدد نسبي لإمكانية تحويله إلى كسر اعتيادي.

تمثيل العدد النسبي على خط الأعداد:

تعلمنا في الصف الأول كيفية تمثيل العدد الصحيح على خط الأعداد ، وذلك بتقسيمه (خط الأعداد) إلى أجزاء متساوية، يمثل كل منها وحدة واحدة (عدداً صحيحاً). ولتمثيل العدد النسبي نجزِّئ كلاً من هذه الأجزاء إلى أقسام متساوية يمثل كل منها أجزاء العدد الصحيح.

وعليه فإن العدد $-\frac{٥}{٣}$ يبعد بمقدار $\frac{٥}{٣}$ وحدة عن الصفر من جهة اليسار، والعدد $\frac{٧}{٣}$ يبعد بمقدار $\frac{٧}{٣}$ وحدة عن الصفر من جهة اليمين.

مطلق العدد النسبي : هو بعد ذلك العدد عن الصفر عند تمثيله على خط الأعداد. ويرمز لمطلق العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ بالرمز $\left|\frac{أ}{ب}\right|$

فمثلاً:

$$\left|-\frac{٥}{٣}\right| = \frac{٥}{٣} \quad ، \quad \left|\frac{٧}{٢}\right| = \frac{٧}{٢}$$

أي أن **مطلق أي عدد نسبي ≠ صفر هو ذلك العدد بدون إشارة.**

تساوي العددين النسبيين:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ عددين نسبيين فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ إذا كان **أ × د = ج × ب**

وبعبارة أخرى يتساوى العددان النسبيان إذا كان: **حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين**

ونستفيد من هذه الخاصية لاختبار فيما إذا كان العددان النسبيان متساويين.

مثال١ : هل $\frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٠}$ ؟

الحل: حاصل ضرب الطرفين = ٤ × ١٠ = ٤٠

حاصل ضرب الوسطين = ٥ × ٨ = ٤٠

∵ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

∴ $\frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٠}$

مثال٢ : هل $\frac{٧}{١٥} = \frac{٩}{١٢}$ ؟

الحل: حاصل ضرب الطرفين = ٧ × ١٢ = ٨٤

حاصل ضرب الوسطين = ١٥ × ٩ = ١٣٥

∵ حاصل ضرب الطرفين ≠ حاصل ضرب الوسطين

∴ $\frac{٧}{١٥} \neq \frac{٩}{١٢}$

مثال٣ : هل $\frac{-٣}{٥} = \frac{-٤}{٦}$ ؟

الحل: -٣ × ٦ = -١٨ ، ٥ × -٤ = -٢٠ ∵ -١٨ ≠ -٢٠

∴ $\frac{-٣}{٥} \neq \frac{-٤}{٦}$

٥ ٦

(٣-٢) مقارنة وترتيب الأعداد النسبية

أ- لمقارنة عددين نسبيين لهما المقام نفسه، فإن العدد الذي بسطه أكبر هو الأكبر.

ب- لمقارنة عددين نسبيين مقاماهما مختلفان، يجب توحيد المقامين أولاً وذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ.) لهما والذي سيكون المقام الموحد للعددين المراد مقارنتهما، ثم نقارن كما في الحالة (أ) أعلاه.

مثال ١ : قارن بين العددين $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$

الحل: ∵ م. م. أ. للمقامين هو (٢٠)

$$\frac{٣ \times ٥}{٤ \times ٥} \text{ ، } \frac{٤ \times ٤}{٥ \times ٤}$$

$$\frac{١٥}{٢٠} \text{ ، } \frac{١٦}{٢٠}$$

$$\because ١٦ > ١٥$$

$$\therefore \frac{١٦}{٢٠} > \frac{١٥}{٢٠}$$

$$\therefore \frac{٤}{٥} > \frac{٣}{٤}$$

مثال٢ : قارن بين العددين $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٥}{٧}$

الحل: ∵ م. م. أ. للمقامين (٣ ، ٧) هو (٢١)

∴ $\frac{-٢}{٣} = \frac{-٢ \times {\color{red}٧}}{٣ \times {\color{red}٧}} = \frac{-١٤}{٢١}$ ،

$\frac{-٥}{٧} = \frac{-٥ \times {\color{blue}٣}}{٧ \times {\color{blue}٣}} = \frac{-١٥}{٢١}$

∵ $\frac{-١٤}{٢١} > \frac{-١٥}{٢١}$ **(لماذا؟)**

∴ $\frac{-٢}{٣} > \frac{-٥}{٧}$

ملاحظة:

١) يمكن استخدام طريقة المقارنة بين عددين نسبيين لاختبار تساويهما.

٢) يمكن تعميم طريقة المقارنة بين عددين نسبيين لترتيب مجموعة من الأعداد النسبية تصاعدياً أو تنازلياً، وذلك بعد توحيد مقاماتها بإيجاد (م. م. أ.) لها ثم ترتيب بسوطها تصاعدياً أو تنازلياً وحسب السؤال.

مثال٣ : رتّب الأعداد النسبية الآتية ترتيباً تنازلياً: $\frac{-٥}{٦}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٤}$

الحل: ∵ م. م. أ. للمقامات (٦ ، ٣ ، ٤) هو (١٢)

∴ الأعداد بعد توحيد المقامات ستكون: $\frac{-١٠}{١٢}$ ، $\frac{-٨}{١٢}$ ، $\frac{-٩}{١٢}$

∵ $-٨ > -٩ > -١٠$ **(لماذا؟)**

∴ $\frac{-٨}{١٢} > \frac{-٩}{١٢} > \frac{-١٠}{١٢}$

وعليه يكون ترتيب الأعداد تنازلياً كالآتي:

$\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، $\frac{-٥}{٦}$

مثال ٤ : رتّب الأعداد النسبية الآتية ترتيباً تصاعدياً: $\frac{-٧}{٨}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $-١\frac{١}{٤}$ ، ٠

الحل: ∵ م. م. أ. للمقامات (٨ ، ٣ ، ٤ ، ١) هو (٢٤)

∴ $\frac{-٧}{٨} = \frac{-٢١}{٢٤}$ ،

$\frac{٥}{٣} = \frac{٤٠}{٢٤}$ ،

$-١\frac{١}{٤} = \frac{-٥}{٤} = \frac{-٣٠}{٢٤}$ ،

$٠ = \frac{٠}{٢٤}$

∴ $\frac{٤٠}{٢٤} > \frac{٠}{٢٤} > \frac{-٢١}{٢٤} > \frac{-٣٠}{٢٤}$

أي أن $\frac{٥}{٣} > ٠ > -\frac{٧}{٨} > -١\frac{١}{٤}$ **(لماذا؟)**

وعليه يكون ترتيب الأعداد تصاعدياً كالآتي:

$$-١\frac{١}{٤} \text{ ، } -\frac{٧}{٨} \text{ ، } ٠ \text{ ، } \frac{٥}{٣}$$

ملاحظة:

١) أحياناً تكون المقارنة بين العددين بشكل مباشر (ذهنياً). كما في الأمثلة:

$٣\frac{١}{٢} > ٣\frac{١}{٤}$ **(لأن $\frac{١}{٢} > \frac{١}{٤}$)**

$٢\frac{١}{٣} > -٨\frac{١}{٢}$ **(لأن أصغر عدد موجب أكبر من أي عدد سالب)**

$\frac{١٢}{٣} > \frac{٦}{٧}$ **(لأن العدد الأول أكبر من واحد بينما العدد الثاني أصغر من واحد)**

$-٣.٦ < ٠$ **(لأن الصفر أكبر من أي عدد سالب)**

٢) يحول العدد الكسري إلى عدد نسبي وذلك بضرب المقام في العدد الصحيح، ثم نجمع الناتج مع العدد الذي في البسط ويبقى المقام نفسه.

مثال : $٣\frac{١}{٥} = \frac{٥ \times ٣ + ١}{٥} = \frac{١٦}{٥}$ ،

$-٤\frac{٢}{\ } = -\frac{٣٠}{\ }$

٧ ٧

العدد النسبي في أبسط صورة:

إذا ضُرِب (أو قُسِّم) كل من بسط ومقام العدد النسبي في (أو على) عددٍ صحيحٍ لا يساوي صفراً، فإننا نحصل على صورة أخرى للعدد النسبي نفسه.

مثال ١ : $-\frac{6}{15} = \frac{-6 \times -2}{15 \times -2} = \frac{12}{-30}$ ،

$-\frac{6}{15} = \frac{12 \div 3}{-30 \div 3} = \frac{4}{-10}$ ،

$-\frac{6}{15} = \frac{-6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{-2}{5}$

فالأعداد: $\frac{-6}{15}$ ، $\frac{12}{-30}$ ، $\frac{4}{-10}$ ، $\frac{-2}{5}$ هي صور مختلفة للعدد نفسه.

ملاحظة:

يمكن وضع العدد النسبي في أبسط صورة وذلك بقسمة كل من بسطه ومقامه على ع.م.أ. لهما.

مثال٢ : ضع العدد النسبي ($-\frac{18}{24}$) في أبسط صورة.

الحل: $-\frac{18}{24} = -\frac{18 \div 6}{24 \div 6} = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$

وعلى العموم:

يكون العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ في أبسط صورة إذا كان:

١) ب $\in$ ص$^{+}$

٢) العامل المشترك الأكبر للعددين أ ، ب هو الواحد الصحيح.

مثال٣ : جد صوراً عدة للعدد النسبي : $\frac{-١٢}{١٨}$

الحل: $\frac{-١٢}{١٨} = \frac{-١٢ \div ٣}{١٨ \div ٣} = \frac{-٤}{٦}$

$\frac{-١٢}{١٨} = \frac{-١٢ \times (-٢)}{١٨ \times (-٢)} = \frac{٢٤}{-٣٦}$

$\frac{-١٢}{١٨} = \frac{-١٢ \div ٦}{١٨ \div ٦} = \frac{-٢}{٣}$

$\frac{-١٢}{١٨} = \frac{-١٢ \times ٥}{١٨ \times ٥} = \frac{-٦٠}{٩٠}$

فالأعداد: $\frac{-٤}{٦}$ ، $\frac{٢٤}{-٣٦}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٦٠}{٩٠}$ هي صور للعدد النسبي $\frac{-١٢}{١٨}$

وأن الصورة : $\frac{-٢}{٣}$ هي أبسط صورة للعدد النسبي $\frac{-١٢}{١٨}$ **(لأن ع.م.أ للبسط والمقام = ١)**

تمارين (٣ – ١)

١) استخرج الأعداد النسبية من نصوص الآيات الكريمة:

أ) قال تعالى: ﴿إِنَّ رَبَّكَ يَعْلَمُ أَنَّكَ تَقُومُ أَدْنَى مِنْ ثُلُثَيِ اللَّيْلِ وَنِصْفَهُ وَثُلُثَهُ وَطَائِفَةٌ مِنَ الَّذِينَ مَعَكَ﴾. [المزمل:٢٠]

ب) قال تعالى: ﴿وَمَا بَلَغُوا مِعْشَارَ مَا آتَيْنَاهُمْ﴾. [سبأ: ٤٥]

٢) اختبر تساوي الأعداد النسبية الآتية:

أ) $\frac{٣}{-٥}$ ، $\frac{-٢١}{٣٥}$

ب) $-٣\frac{١}{٢}$ ، $-٢\frac{١}{٥}$

٣) قارن بين:

أ) $-\frac{٥}{٨}$ ، $-\frac{٧}{١٢}$

ب) $\frac{١٠}{٣}$ ، $٣\frac{١}{٥}$

٤) ضع أحد الرموز (< ، > ، =) لتحصل على عبارة صحيحة:

أ) -٦ .... -٨

ب) -١٨ .... ٠

ج) $\frac{٣}{٥}$ .... $\frac{٦}{١٠}$

د) $-١\frac{١}{٤}$ .... $-٣\frac{٣}{٤}$

هـ) $\frac{٤}{٥}$ .... $\frac{٣}{٥}$

و) $\frac{١}{٢}$ .... -١

ز) -٤.٦ .... ٤.٦

ح) -٠.٨ .... $-\frac{٤}{٥}$

٥) رتّب الأعداد النسبية الآتية ترتيباً تصاعدياً: $1\frac{1}{4}$ ، $3\frac{1}{2}$ ، $-5\frac{1}{2}$ ، $-1\frac{1}{4}$

٦) رتّب الأعداد النسبية الآتية ترتيباً تنازلياً: $1\frac{2}{3}$ ، $-\frac{5}{6}$ ، $\frac{5}{8}$ ، $-\frac{19}{24}$

٧) ضع كل عددٍ نسبيٍّ من الأعداد الآتية في أبسط صورة:

أ) $\frac{24}{-48}$ ب) $\frac{12}{-15}$ جـ) $\frac{-54}{36}$ د) $-\frac{72}{42}$ هـ) $\frac{-110}{-99}$

(٣-٣) جمع الأعداد النسبية

درست في الصف الأول كيفية جمع الكسور الاعتيادية في حالة تشابه المقامات، وحالة اختلافها.
وبالطريقة نفسها يمكنك جمع الأعداد النسبية، كما ستلاحظ من الأمثلة المتنوعة الآتية:

مثال١ : جد ناتج $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$

الحل:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$ (الجمع مباشر لأن المقامات موحدة)

مثال٢ : جد ناتج $\frac{-3}{5} + \frac{4}{7}$

الحل: نوحّد المقامات بأخذ م. م. أ. لها وهو (٣٥) ثم نجمع كما في المثال أعلاه.

$$\frac{-3}{} + \frac{4}{} = \frac{-21+20}{} = \frac{-1}{}$$

٣٥ ٣٥ ٧ ٥

مثال٣ : جد ناتج $٣\frac{١}{٣} + ٥\frac{١}{٤}$

الحل:

$$٣\frac{١}{٣} + ٥\frac{١}{٤} = \frac{١٠}{٣} + \frac{٢١}{٤}$$

$$= \frac{٤٠ + ٦٣}{١٢}$$

$$= \frac{١٠٣}{١٢}$$

$$= ٨\frac{٧}{١٢}$$

ملاحظة:

قواعد جمع الأعداد النسبية هي نفسها في جمع الأعداد الصحيحة. أي أن:

١) مجموع عددين نسبيين متشابهين في الإشارة = مجموع مطلقي العددين وبالإشارة نفسها.

٢) مجموع عددين نسبيين مختلفين في الإشارة = الفرق بين مطلقي العددين وإشارته هي إشارة العدد النسبي نفسها ذي المطلق الأكبر.

مثال ٤ : جد ناتج كل ممّا يأتي:

أ) $\frac{٢}{٧} + \frac{٣}{٧}$ ب) $\frac{-١}{٤} + \frac{-٥}{٦}$ ج) $\frac{-٢}{٣} + \frac{٣}{٨}$

الحل: أ) $\frac{٢}{٧} + \frac{٣}{٧} = \frac{٢ + ٣}{٧} = \frac{٥}{٧}$

ب) $\frac{-١}{٤} + \frac{-٥}{٦} = -\left(\frac{١}{٤} + \frac{٥}{٦}\right)$

$= -\left(\frac{٣}{١٢} + \frac{١٠}{١٢}\right)$ (م. م. أ. للمقامين = ١٢)

$= -\frac{١٣}{١٢}$

$= -١\frac{١}{١٢}$

ج) $\frac{-٢}{٣} + \frac{٣}{٨} = \frac{-١٦}{٢٤} + \frac{٩}{٢٤}$ (م. م. أ. للمقامين = ٢٤)

$= -\left(\frac{١٦}{٢٤} - \frac{٩}{٢٤}\right)$

الفرق بين مطلقي العددين بعد إعطاءه إشارة العدد ذي المطلق الأكبر.

$= -\frac{٧}{٢٤}$

مثال٥ : جد ناتج $٣\frac{١}{٢} + (-٨\frac{١}{٦})$

الحل:

$$٣\frac{١}{٢} + (-٨\frac{١}{٦}) = \frac{٧}{٢} + (-\frac{٤٩}{٦})$$

$$= \frac{٤٢}{١٢} + (-\frac{٩٨}{١٢})$$

$$= -(\frac{٩٨}{١٢} - \frac{٤٢}{١٢})$$ (لماذا؟)

$$= -\frac{٥٦}{١٢}$$

$$= -\frac{١٤}{٣}$$

$$= -٤\frac{٢}{٣}$$

مثال٦ : جد ناتج $-٩,٥٧ + ١٢,٨٣$

الحل: $-٩,٥٧ + ١٢,٨٣ = +(١٢,٨٣ - ٩,٥٧)$ (لماذا؟)

$= ٣,٢٦$

مثال٧ : جد ناتج $٤\frac{١}{٤} + ٢,٥$

الحل: لحل هذا المثال يجب توحيد صورتي العددين

$$٤\frac{١}{٤} + ٢,٥ = ٤\frac{١}{٤} + ٢\frac{٥}{١٠}$$ **(حولنا الكسر العشري إلى كسر اعتيادي)**

$$= ٦\frac{٥ + ١٠}{٢٠} = ٦\frac{١٥}{٢٠}$$

$$= ٦\frac{٣}{٤}$$

طريقة ثانية: $٤\frac{١}{٤} + ٢,٥ = ٤,٢٥ + ٢,٥٠ = ٦,٧٥ = ٦\frac{٣}{٤}$

(٣−٤) طرح الأعداد النسبية

تعلم أنه لطرح عدد صحيح من آخر فإننا نجمع النظير الجمعي للعدد المطروح مع العدد المطروح منه.

فمثلاً: $٣ - ٨ = ٣ + (-٨) = -(٨ - ٣) = -٥$ **(لماذا؟)**

$$-٥ - ١٤ = -٥ + (-١٤) = -(٥ + ١٤) = -١٩$$

ويمكن تعميم ذلك على الأعداد النسبية. وتُعرَّف عملية الطرح على الأعداد النسبية كالآتي:

لطرح عدد نسبي من آخر، نجمع النظير الجمعي للعدد المطروح مع العدد المطروح منه. أي أن:

$$\frac{أ}{ب} - \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} + \left(-\frac{ج}{د}\right)$$ لأي $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ $\in$ ن ، ب $\neq$ ٠ ، د $\neq$ ٠

مثال١ : جد ناتج :

$$٥\frac{١}{٢} - ٨\frac{١}{٥} = ٥\frac{١}{٢} + (-٨\frac{١}{٥}) = -(٨\frac{٢}{١٠} - ٥\frac{٥}{١٠}) = -٣\frac{٧}{١٠}$$

$$، \; -٣\frac{٢}{٥} - (-٩\frac{١}{٢}) = -٣\frac{٢}{٥} + ٩\frac{١}{٢} = +\left(٩\frac{٥}{١٠} - ٣\frac{٤}{١٠}\right) = ٦\frac{١}{١٠}$$

مثال٢ : جد ناتج $٣\frac{١}{٢} - ٨\frac{١}{٤}$

الحل: $٣\frac{١}{٢} - ٨\frac{١}{٤} = \frac{٧}{٢} + (-\frac{٣٣}{٤}) = \frac{١٤}{٤} - \frac{٣٣}{٤} = \frac{-١٩}{٤} = ٤\frac{-٣}{٤}$

مثال٣ : يحين أذان المغرب في إحدى المدن في الساعة $٥\frac{٣}{٤}$ **وبعد أسابيع تناقص** $\frac{١}{٢}$ **ساعة.**
احسب وقت الأذان بعد التناقص.

الحل: $٥\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٢} = ٥\frac{٣}{٤} + (-\frac{١}{٢})$

$$= (٥\frac{٣}{٤} - \frac{٢}{٤})$$

$$= ٥\frac{١}{٤}$$

أو طريقة ثانية:

$$5\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{23}{4}-\frac{1}{2}=\frac{23-2}{4}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

مثال٣: ربح صاحب محل في اليوم الأول $25\frac{1}{2}$ ألف دينار، وفي اليوم الثاني ربح $40\frac{3}{5}$ ألف دينار، ثم خسر في اليوم الثالث $11\frac{1}{4}$ ألف دينار. جد صافي الربح في الأيام الثلاثة.

الحل:

$$\left(25\frac{1}{2}+40\frac{3}{5}\right)-11\frac{1}{4}=\left(65\frac{5+6}{10}\right)+\left(-11\frac{1}{4}\right)$$

$$=65\frac{11}{10}+\left(-11\frac{1}{4}\right)$$

$$=54\frac{22-5}{20}$$

$$=54\frac{17}{20}$$

= ٥٤,٨٥ ألف دينار صافي الربح

تمارين (٣ – ٢)

١) جد ناتج ما يأتي:

أ) $٣\frac{١}{٥} + ٢\frac{١}{١٠}$ ب) $١٥\frac{١}{٣} + ١٢\frac{١}{٤}$ ج) $-٤,٣٢ + ٩,١$

د) $٦,٥ + ٧\frac{١}{٥}$ هـ) $٣\frac{١}{٦} + ٧\frac{١}{٣} + ٨\frac{١}{٤}$ و) $\frac{٢}{٧} + \frac{٥}{٦} + ١\frac{٣}{٧}$

٢) جد ناتج ما يأتي:

أ) $\frac{٥}{٦} - \frac{٣}{٨}$ ب) $٧\frac{١}{٨} - ٣\frac{٥}{٦}$ ج) $-١,٥ + ١,٢$

د) $٦,٥ - ٥,٨$ هـ) $٢\frac{١}{٣} - ٨\frac{١}{٤} - ١\frac{١}{٢}$ و) $\frac{-٥}{٨} - \frac{٥}{٦}$

٣) بلغت درجة الحرارة في أحد الأيام $٧\frac{١}{٤}°$ ثم انخفضت بمقدار $٦°$ خلال الأيام الخمسة التالية مباشرة. جد ما وصلت إليه درجة الحرارة .

٤) بلغت درجة الحرارة العظمى خلال أحد الأشهر $١٨°$ وبلغت درجة الحرارة الصغرى خلال الشهر نفسه $٤\frac{١}{٢}°$. احسب الفرق بين الدرجتين العظمى والصغرى.

(٣-٥) ضرب الأعداد النسبية

تعلم أن:

(+٣) × (+ ٨) = +(٣ ×٨) = +(٢٤) (حسب قواعد ضرب الأشارة في ص)

، (+٥) × (- ٦) = -(٥ × ٦) = -٣٠

، (-٧) × (+٤) = -(٧ × ٤) = -٢٨

، (-٥) × (-٧) = +(٥ × ٧) = +٣٥

وتعلم أن:

$$\frac{٣}{٢} \times \frac{٥}{٧} = \frac{٣ \times ٥}{٢ \times ٧} = \frac{١٥}{١٤}$$

$$، \frac{-١}{٣} \times \frac{-٢}{٥} = \frac{(-١) \times (-٢)}{٣ \times ٥} = \frac{٢}{١٥}$$

$$، \frac{٣}{٨} \times \frac{-٥}{٧} = \frac{٣ \times (-٥)}{٨ \times ٧} = \frac{-١٥}{٥٦}$$

$$، \frac{-٣}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{(-٣) \times ٢}{٥ \times ٥} = \frac{-٦}{٢٥}$$

وهذا يقودنا إلى التعميم الآتي:

حاصل ضرب عددين نسبيين متشابهين في الإشارة = عدداً نسبياً موجباً.

حاصل ضرب عددين نسبيين مختلفين في الإشارة = عدداً نسبياً سالباً.

مثال١: جد ناتج ما يأتي:

أ) $\frac{٥}{\quad} \times \left(-٣\frac{٣}{\quad}\right)$ ب) $\left(-٢\frac{١}{\quad}\right) \times \left(-٨\frac{١}{\quad}\right)$

٣ ٤ ٥ ٧

ج) $(-٣,٢) \times ١٢,٢$ د) $(-٣\frac{١}{٥}) \times ١٦,٠٤$

الحل:

أ) $\frac{٥}{٧} \times (-٣\frac{٣}{٥}) = -(\frac{٥}{٧} \times ٣\frac{٣}{٥})$

$= -(\frac{٥}{٧} \times \frac{١٨}{٥})$

$= -\frac{١٨}{٧}$

$= -٢\frac{٤}{٧}$

ب) $(-٢\frac{١}{٤}) \times (-٨\frac{١}{٣}) = +(٢\frac{١}{٤} \times ٨\frac{١}{٣})$

$= \frac{٩}{٤} \times \frac{٢٥}{٣}$

$= \frac{٧٥}{٤}$

$= ١٨\frac{٣}{}$

٤

جـ) (−٣,٢) × ١٢,٢ = − (٣,٢ × ١٢,٢)

= − ٣٩,٠٤

١٢٢
× ٣٢
———
٢٤٤
+ ٣٦٦
———
٣٩٠٤

د) (− $\frac{١}{٥}$ ٣) × ١٦,٠٤ = − (٣,٢ × ١٦,٠٤)   **(لماذا؟)**

= − ٥١,٣٢٨

١٦٠٤
× ٣٢
———
٣٢٠٨
+ ٤٨١٢
———
٥١٣٢٨

(٣−٦) قسمة الأعداد النسبية

تعلم أن: ٣ ÷ ٤ = ٣ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

، ٣٦ ÷ (−٩) = ٣٦ × $\frac{−١}{٩}$ = −٤

كذلك تعلم أن:

$\frac{٣}{٢}$ ÷ $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{٤}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

١ ١ ٥ ٥ ٥ ٤

، $٢\frac{\ }{٢} \div ١\frac{\ }{٤} = \frac{\ }{٢} \div \frac{\ }{٤} = \frac{\ }{٢} \times \frac{\ }{٥} = ٢$

ويمكن تعميم ذلك على الأعداد النسبية فنقول:

للقسمة على عدد نسبي نضرب في نظيره الضربي.

أي أن عملية القسمة تتحول إلى ضرب في النظير الضربي للعدد المقسوم عليه. وعموماً:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{ج}}$$

لكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ ∈ ن ، ب ≠ ٠ ، ج ≠ ٠ ، د ≠ ٠

مثال١ : جد ناتج كل ممّا يأتي:

أ) $\frac{٥}{٦} \div (-٣\frac{١}{٣})$ ب) $(-٤\frac{١}{٥}) \div (-١\frac{٢}{٥})$ جـ) $٣\frac{١}{٥} \div (-١\frac{٣}{٥})$

الحل:

أ) $\frac{٥}{٦} \div (-٣\frac{١}{٣}) = \frac{٥}{٦} \div \frac{-١٠}{٣} = \frac{٥}{٦} \times \frac{-٣}{١٠} = \frac{-١}{٤}$

ب) $-٤\frac{١}{٥} \div (-١\frac{٢}{٥}) = \frac{-٢١}{٥} \div \frac{-٧}{٥} = \frac{-٢١}{٥} \times \frac{-٥}{٧} = \frac{٣}{١} = ٣$

جـ) $٣\frac{١}{\ } \div (-١\frac{٣}{\ }) = \frac{١٦}{\ } \div \frac{-٨}{\ } = \frac{١٦}{\ } \times \frac{-٥}{\ } = \frac{-٢}{\ } = -٢$

٥ ٥ ٥ ٥ ٥ ٨ ١

مثال٢ : جد ناتج كل ممّا يأتي:

أ) $\left(-\frac{٣}{٤} \div \frac{٣}{٢}\right) \times \frac{-١}{٥}$

ب) $\frac{٩}{٦} \div \left(١\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right)$

الحل:

أ) $\left(\frac{-٣}{٤} \div \frac{٣}{٢}\right) \times \frac{-١}{٥} = \left(\frac{-٣}{٤} \times \frac{٢}{٣}\right) \times \frac{-١}{٥} = \frac{١}{١٠}$

ب) $\frac{٩}{٦} \div \left(١\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right) = \frac{٩}{٦} \div \left(\frac{٥}{٤} - \frac{١}{٢}\right)$

$= \frac{٩}{٦} \div \frac{٥ - ٢}{٤}$

$= \frac{٩}{٦} \div \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٩}{٦} \times \frac{٤}{٣}$

$= ٢$

ملاحظة:

١- في حالة وجود عمليات عدة في السؤال نجري العمليات داخل الأقواس أولاً، ثم عمليتي الضرب والقسمة (× ، ÷)، ثم الجمع والطرح (+ ، −).

٢- عمليتا القسمة والطرح ليستا إبداليتين.

تمارين (٣ - ٣)

١) جد ناتج ما يأتي:

أ) $٢\frac{١}{٦} \times (٢\frac{٥}{٦} + ١\frac{-١}{٥})$

ب) $\frac{-٣}{٤} \times \frac{٧}{٨} \times ١\frac{١}{٣}$

جـ) $\frac{-٧}{٤} \div (٣\frac{١}{٤} - ١\frac{١}{٣})$

د) $-\frac{١}{٥} \times (\frac{-٣}{٤} \div \frac{٣}{٢})$

هـ) $(٧\frac{١}{٢} \times ٢\frac{١}{٤}) \times (-٦\frac{١}{٥})$

و) $-٢\frac{١}{٤} \times [٨\frac{١}{٢} \times (-٦\frac{٥}{٢})]$

٢) تغيرت درجة الحرارة بمقدار ($-٤\frac{١}{٢}$)° خلال خمسة أيام، جد متوسط التغيير في درجـة الحرارة لليوم الواحد.

٣) يصعد منطاد بسرعة ($\frac{٣}{٤}$) كيلومتر في الساعة، عيِّن موضع المنطاد بعد ساعتين وربع.

(٣-٧) الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجب

إن الجذر التربيعي لعددٍ موجبٍ مثل (٤٩) هو (٧) لأن ٧ × ٧ = ٤٩ وعليه فإن:

$\sqrt{٤٩}$ = ٧ ويرمز له بالجذر $\sqrt{\quad}$ ويقرأ (الجذر التربيعي)

وبالمثل: $\sqrt{٨١}$ = ٩ لأن ٩ × ٩ = ٨١

، $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ لأن ١٥ × ١٥ = ٢٢٥

أي أن الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجب هو عدد إذا ضرب في نفسه كان الناتج ذلك العدد النسبي.

ملاحظة: إذا كان العدد كبيراً أو يصعب علينا إيجاد قيمة جذره التربيعي بصورة مباشرة، نحلِّله إلى العوامل الأولية ونأخذ من كل عاملين متشابهين عاملاً واحداً ثم نضرب هذه العوامل ليكون الناتج الجذر التربيعي لذلك العدد.

كما في: $\sqrt{٤٤١}$ = ٢١

٤٤١	٣	٣
١٤٧	٣	
		×
٤٩	٧	٧
٧	٧	
١		= ٢١

وبالمثل $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥

٦٢٥	٥	٥
١٢٥	٥	
		×
٢٥	٥	٥
٥	٥	
١		= ٢٥

بعض خواص الجذور التربيعية:

١ – الجذر التربيعي يتوزع على عمليتي الضرب والقسمة. أي أن:

$$\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$$

$$\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

مثال١ : جد ناتج $\sqrt{١٩٦}$

الحل: $\sqrt{١٩٦} = \sqrt{٤ \times ٤٩} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٤٩} = ٢ \times ٧ = ١٤$

طريقة ثانية: نستخدم طريقة التحليل إلى العوامل الأولية.

$\sqrt{١٩٦} = ٢ \times ٧ = ١٤$

لأن $١٤ \times ١٤ = ١٩٦$

١٩٦	٢
٩٨	٢
٤٩	٧
٧	٧
١	

$٢ \times ٧ = ١٤$

مثال٢ : جد ناتج $\sqrt{٠,٨١}$ ، $\sqrt{٠,٦٤}$

الحل:

$$\sqrt{٠,٨١} = \sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{٨١}}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٩}{١٠} = ٠,٩$$

$$\sqrt{٠,٦٤} = \sqrt{\frac{٦٤}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{٦٤}}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٨}{١٠} = ٠,٨$$

٢- الجذر التربيعي لا يتوزع على عمليتي الجمع والطرح. أي أن:

$\sqrt{أ + ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

، $\sqrt{أ - ب} \neq \sqrt{أ} - \sqrt{ب}$

مثال٣: $\sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ بينما $\sqrt{١٦} + \sqrt{٩} = ٤ + ٣ = ٧$

لاحظ أن ٥ ≠ ٧

$\therefore \sqrt{١٦ + ٩} \neq \sqrt{١٦} + \sqrt{٩}$

تحقَّق بنفسك من الخاصية لعملية الطرح.

تمارين (٣ - ٤)

١) جد ناتج ما يأتي:

أ) $\sqrt{١\frac{١٥}{٤٩}}$

ب) $\sqrt{٧\frac{١}{٩}}$

جـ) $\sqrt{٣,٢٤}$

د) $\sqrt{١\frac{١١}{٢٥}}$

هـ) $\sqrt{٢,٢٥}$

٢) قدّر بقيم تقريبية ما يأتي:

أ) $\sqrt{٨٥}$

ب) $\sqrt{٣٥}$

جـ) $\sqrt{٠,٥٣}$

د) $\sqrt{٠,٧٥}$

٣) جامع مربع الشكل مساحته قاعدته ١٢٢٥ م^{٢}. جد طول ضلعه بالأمتار.

الفصل الرابع
المقادير الجبرية

(٤ – ١) الأسس

تعلم أن: ٤ × ٤ يمكن أن يكتب ٤^{٢} ، ويُقرأ (٤ أسّ ٢)، أو (٤ مرفوع للأس ٢)، أو (٤ تربيع)،

وكذلك ٥ × ٥ × ٥ يمكن أن يكتب ٥^{٣} ، ويُقرأ (٥ أسّ ٣)، أو(٥ مرفوع للأس ٣)، أو (٥ تكعيب).

وعموماً لأي عدد نسبي س :

س = س^{١} (إذا كان الأس ١ فلا يُكتب ولا يُقرأ)

س × س = س^{٢} ، وتُقرأ (س تربيع) ، أو (س أسّ ٢).

س × س × س = س^{٣} ، وتُقرأ (س تكعيب) ، أو (س أسّ ٣).

س × س × س × س = س^{٤} ، وتُقرأ (س أسّ ٤)، أو (س مرفوع للأس ٤).

$$\underbrace{\text{س × س × س × … × س}}_{\text{س مضروب في نفسه ن من المرات}} = \text{س}^{\text{ن}}$$

ويُقرأ (س أسّ ن)، أو (س مرفوع للأس ن).

في الرمز **س**^{ن} نسمي **س** (الأساس) ، ونسمي **ن** (الأُس) أي أن:

الأُس: **هو عدد مرات ضرب الأساس في نفسه.**

قواعد في الأسس:

١) س^{٠} = ١

أي أن: أي أساس مرفوع للأس صفر = ١.

٢) $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$ $\forall$ م ، ن $\in$ ص

أي عند الضرب تجمع الأسس بشرط تساوي الأساسات.

أمثلة:

أ) $س^{٣} \times س^{٧} = س^{٣+٧} = س^{١٠}$

ب) $ص^{٢} \times ص^{٥} = ص^{٢+٥} = ص^{٧}$

جـ) $(-٢)^{٤} \times (-٢)^{٣} = (-٢)^{٤+٣} = (-٢)^{٧}$

د) $س^{٤} \times ص^{٥} = س^{٤} ص^{٥}$ (هنا لا يمكن جمع الأسس لأن الأساسات مختلفة)

٣) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ $\forall$ م ، ن $\in$ ص

أي عند القسمة تطرح الأسس بشرط تساوي الأساسات.

أمثلة:

أ) $\frac{س^{٩}}{س^{٥}} = س^{٩-٥} = س^{٤}$

ب) $\frac{ص^{٦}}{ص^{٨}} = ص^{٦-٨} = ص^{-٢}$

جـ) $\frac{س^{٤}}{س^{٤}} = س^{٤-٤} = س^{٠} = ١$ (لماذا؟)

د) $هـ^{٨} \div هـ^{٥} = هـ^{٨-٥} = هـ^{٣}$

هـ) $ع^{٣} \div ع^{٥} = ع^{٣-٥} = ع^{-٢}$

٤) $(\text{س} \times \text{ص})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} \times \text{ص}^{\text{ن}}$ ، $\left(\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{\text{ن}} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ص}^{\text{ن}}}$

لكن $(\text{س} \pm \text{ص})^{\text{ن}} \neq \text{س}^{\text{ن}} \pm \text{ص}^{\text{ن}}$

الأسس تتوزع على الضرب والقسمة ولا تتوزع على الجمع والطرح.

أمثلة:

أ) $(\text{أ ب})^{٣} = \text{أ}^{٣}\ \text{ب}^{٣}$

ب) $(-٣\text{س ص})^{٢} = (-٣)^{٢}\ \text{س}^{٢}\ \text{ص}^{٢} = ٩\ \text{س}^{٢}\ \text{ص}^{٢}$

جـ) $\left(\dfrac{٤\text{س}}{٢\text{ص}}\right)^{٣} = \dfrac{(٤\text{س})^{٣}}{(٢\text{ص})^{٣}} = \dfrac{٤^{٣} \times \text{س}^{٣}}{٢^{٣} \times \text{ص}^{٣}} = \dfrac{٦٤\ \text{س}^{٣}}{٨\ \text{ص}^{٣}} = \dfrac{٨\ \text{س}^{٣}}{\text{ص}^{٣}}$

د) $\left(\dfrac{\text{س} + \text{ص}}{٣\text{س}}\right)^{٤} = \dfrac{(\text{س} + \text{ص})^{٤}}{(٣\text{س})^{٤}} = \dfrac{(\text{س} + \text{ص})^{٤}}{٣^{٤} \times \text{س}^{٤}} = \dfrac{(\text{س} + \text{ص})^{٤}}{٨١\ \text{س}^{٤}}$

٥) $(\text{س}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م} \times \text{ن}}$ $\forall$ م ، ن $\in$ ص

أي عند الرفع تضرب الأسس.

أمثلة:

أ) $(٢^{٢})^{-٣} = ٢^{٢ \times -٣} = ٢^{-٦}$

ب) $(\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣})^{٢} = (\text{س}^{٢})^{٢}\ (\text{ص}^{٣})^{٢} = \text{س}^{٢ \times ٢}\ \text{ص}^{٣ \times ٢} = \text{س}^{٤}\ \text{ص}^{٦}$

جـ) $(-٣\ \text{ل}\ \text{ع}^{٢})^{٣} \times \text{ل}^{-٢} \times \text{ع}^{٣} = (-٣)^{٣}\ \text{ل}^{٣}\ \text{ع}^{٢ \times ٣} \times \text{ل}^{-٢} \times \text{ع}^{٣}$

$= -٢٧ \times \text{ل}^{٣ + (-٢)} \times \text{ع}^{٦ + ٣}$

$= -٢٧ ل ع^{٩}$

ملاحظة: **عند نقل الأساس من البسط إلى المقام أو بالعكس تتغير إشارة أسّه. أي أن:**

$$س^{-م} = \frac{١}{س^{م}} \quad ، \quad \frac{١}{س^{-ن}} = س^{ن}$$

فمثلاً: $٣^{-١} = \frac{١}{٣}$ ،

$\frac{٣}{٢^{-٥}} = ٣ \times ٢^{٥}$ ،

$٢ س^{-٣} = \frac{٢}{س^{٣}}$ ،

$\frac{ص^{-٤}}{س^{-٧}} = \frac{س^{٧}}{ص^{٤}}$

تمارين (٤ – ١)

١) بيِّن العبارات الصائبة والعبارات الخاطئة لما يأتي، ثم صحِّح العبارات الخاطئة:

أ) $ص^{٨} \div ص^{٢} = ص^{٤}$

ب) $\dfrac{س^{٩}}{س^{٢}} = س^{٧}$

جـ) $س^{٢} \div س^{٤} = س^{٢}$

د) $س^{٣} \times ص^{٥} = س^{١٥}$

هـ) $س^{٥} \div س^{٢} = س^{٣}$

و) $س^{٤} \div س^{٢} = س^{٦}$

ز) $(س^{٢})^{٣} = س^{٢} \times س^{٢} \times س^{٢}$

ح) $(س^{٢} \times ص^{٣})^{٤} = س^{٨}\ ص^{١٢}$

ط) $(٢\ ص^{٢}\ س)^{٣} = ٦\ ص^{٦}\ س^{٣}$

ي) $٣^{٤} = ٣ \times ٤$

ك) $٢^{٥} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$

م) $س^{٧} = س^{٥} \times س^{٢}$

٢) جد واختصر الناتج في كل ممَّا يأتي:

أ) $-٣\ س^{٢} \times ٤\ س^{٢}ص^{٢}$

ب) $(-٤\ س^{٣}ص^{٢})^{٢} \times س^{-٥}\ ص^{-٢}$

جـ) $س^{٧} \times س^{-٢} \times ص^{٢} \times ص^{٤}$

د) $(٤\ س)^{٢} \times س$

هـ) $\dfrac{-١٠\ س^{٢}ص^{٣}}{٥\ س\ ص}$

و) $١٢\ س^{٥}\ ص \div س^{٢}ص^{٣}$

ز) $٤ \times (-٣\ أ) \times (-أ^{٢})$

ح) $(-٦\ أ^{٣}\ ب) \times (٣\ أ^{٢}\ ب^{٢})$

٣) جد قيمة م التي تجعل العلاقة المعطاة صحيحة في كل ممّا يأتي:

أ) $س^{م} \times س^{٣} = س^{٧}$

ب) $س^{٥} \div س^{م} = س^{-٢}$

و) $٤^{م} \times ٢^{٢} = ٦٤$

ز) $(س^{٢} \times ص^{م})^{٣} \times ص^{٢} = س^{٦}\ ص^{٨}$

جـ) $(س^{٢})^{م} = س^{١٠}$

ح) $(س^{٣})^{م} = س^{١٢}$

د) $(س^{٣}\ ص^{م})^{٤} = س^{١٢}\ ص^{٨}$

ط) $\dfrac{س^{٥}\ ص^{م}}{س^{٢}\ ص} = س^{٣}\ ص^{٤}$

هـ) $(٢\ س\ ص)^{م} = ٨\ س^{٣}\ ص^{٣}$

(٤-٢) الحد الجبري والمقدار الجبري

الحد الجبري:عبارة عن ثابت (معامل عددي) مضروب في متغير (قسم رمزي) أو أكثر.

مثل: ٣س ص ع ، $\frac{٥}{٢}$ ل^{٢} ع^{٣} ، -٧ ل^{٢} م ، ١٢س^{٢} ص$^{-١}$ ، $\frac{٢ص^{٢}}{س}$ كل منها **حد جبري**.

المقدار الجبري: هو مجموعة حدود جبرية تفصل بينها عملية جمع أو طرح أو كلتاهما.

مثل: ٣س + ٤ص^{٢} ، -٥ أ^{٢} + ٧ب^{٣} ، ٤ل - ٧هـ^{٢} ، ٤س^{٣} + ٣ص^{٥} - $\frac{١}{٢}$ ع^{٢} ،

٤س^{٥} + ٣س^{٢} - ٥س + ٧ كل منها **مقدار جبري**.

ضرب حد جبري في مقدار جبري:

لضرب حد جبري في مقدار جبري ، نضرب هذا الحد في كل حد من حدود المقدار الجبري مستفيدين من خاصيـــة توزيع الضرب على الجمع ، ونختصر الناتج مستخدمين خواص الأسس والإبدال والتجميـــع. وعند ضرب حد جبري في حد جبري آخر نقوم بضرب المعاملات العددية وضرب الرموز حسب قواعد الأسس.

مثال١ : جد ناتج ٣س (٤س^{٢} - ٥س + ٧)

الحل: ٣س (٤س^{٢} - ٥س + ٧) = ٣س × ٤س^{٢} - ٣س × ٥س + ٣س × ٧

= ١٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٢١س

مثال٢ : جد ناتج $(٤س^{٢} - ٨ س + ١٦) \times \frac{١}{٢} س$

الحل: $(٤س^{٢} - ٨ س + ١٦) \times \frac{١}{٢} س = ٤س^{٢} \times \frac{١}{٢} س - ٨ س \times \frac{١}{٢} س + ١٦ \times \frac{١}{٢} س$

$= ٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٨ س$

قسمة مقدار جبري على حد جبري:

لقسمة مقدار جبري على حد جبري معين، نجزِّئ المقدار الجبري إلى حدود ، ثم نقسِّم كلاً منها على المقسوم عليه (الحد الجبري).

ولقسمة حد جبري على حد جبري آخر، نقسِّم المعاملات العددية، ونقسِّم الرموز حسب قواعد الأسس.

مثال١ : جد ناتج $(١٢س^{٤} + ٦س^{٢} - ٤س) \div ٢س$

الحل: $(١٢س^{٤} + ٦س^{٢} - ٤س) \div ٢س = \frac{١٢س^{٤}}{٢س} + \frac{٦س^{٢}}{٢س} - \frac{٤س}{٢س}$

$= ٦س^{٣} + ٣س - ٢$

مثال٢ : جد ناتج $\frac{٩هـ^{٦} - ٥هـ^{٤} + ٣هـ^{٢}}{٣ هـ^{٢}}$

الحل: $\frac{٩هـ^{٦} - ٥هـ^{٤} + ٣هـ^{٢}}{٣ هـ^{٢}} = \frac{٩هـ^{٦}}{٣هـ^{٢}} - \frac{٥هـ^{٤}}{٣هـ^{٢}} + \frac{٣هـ^{٢}}{٣هـ^{٢}}$

$= ٣ هـ^{٤} - \frac{٥}{٣} هـ^{٢} + ١$

تمارين (٤ - ٢)

جد ناتج كل ممَّا يأتي:

١) $٣س^{٢} \times (٥س^{٣} - ٤س + ٤)$

٢) $(٦س^{٢} - ٤س + ٩) \times \frac{١}{٣}س$

٣) $(٤س^{٤} - ٥س^{٣} + ١٥س) \div ٥س$

٤) $\frac{٦س^{٩} - ٣س^{٢} + س}{-٣س}$

٥) $(٨س^{٢}ص^{٣} - ٤س ص^{٢} + ٢س) \div ٢س$

٦) $\frac{٢}{٣}س \left(١٢س^{٢} - \frac{٣}{٨}س + \frac{٣}{٢}\right)$

(٤–٣) جمع وطرح المقادير الجبرية

لجمع مقدارين جبريين ، نرتِّب حدودهما حسب مرتبة الأس (يفضل أن يكون الترتيب تنازلياً)، ثم نضع كل حد تحت الحد المشابه له، ثم نجمع الحدود المتشابهة.

تذكير: تجمع الحدود الجبرية المتشابهة بجمع معاملاتها العددية فقط، ويبقى القسم الرمزي نفسه.

مثال١ : اجمع المقدارين الجبريين الآتيين:

٣س^{٢} + ٤س – ١ ، ٥س^{٢} – ٣س + ٩

الحل:

٣س^{٢} + ٤س – ١

٥س^{٢} – ٣س + ٩

\+ ــــــــــــــــــــ

٨س^{٢} + س + ٨

مثال٢ : اجمع المقدارين الجبريين الآتيين:

٢س^{٣} + ٤س + ٥ ، –٤س^{٢} + ٥س^{٣} + ٢س – ٧

الحل:

٢س^{٣} + ... + ٤س + ٥ **(نضع فراغاً محل س^{٢} لعدم وجوده في المقدار)**

٥س^{٣} – ٤س^{٢} + ٢س – ٧

\+ ــــــــــــــــــــ

٧س^{٣} – ٤س^{٢} + ٦س – ٢

مثال٣ : اجمع المقدارين الجبريين الآتيين:

٤س^{٣} + ١٢س^{٢} – ٥س + ١ ، –٧س^{٢} + ٣

الحل:

٤س^{٣} + ١٢س^{٢} – ٥س + ١

..... – ٧س^{٢} + ... + ٣ **(نضع فراغاً محل س^{٣} ، س لعدم وجودهما)**

\+ ــــــــــــــــــــ

٤س^{٣} + ٥س^{٢} – ٥س + ٤

وبالطريقة نفسها يمكن جمع أكثر من مقدارين جبريين.

مثال٤ : اجمع المقادير الجبرية الآتية:

٣ل^{٢} + ٤ل – ١١ ، ٨ل^{٣} + ١٢٥ ، ل^{٢} – ٦ل

الحل:

..... + ٣ل^{٢} + ٤ل – ١١

٨ل^{٣} + ... + ... + ١٢٥

..... + ل^{٢} – ٦ل + ...

\+ ــــــــــــــــــــ

٨ل^{٣} + ٤ل^{٢} – ٢ل + ١١٤

ملاحظة: لطرح مقدار جبري من مقدار جبري آخر، نتبع الخطوات السابقة نفسها مع تبديل إشارات المقدار المطروح. أي أننا نجمع المقدار المطروح منه مع النظير الجمعي للمقدار المطروح.

مثال٥ : اطرح المقدار $(٢س^{٢} - ٣س^{٣} + ٥)$ من $(-٥س^{٣} + ٦س^{٢} - ٧س^{٤} - ٧)$

الحل: نرتِّب أولاً ، ثم نضع المطروح منه (المقدار الجبري الذي بعد كلمة "من") في الأعلى، ثم نكتب المقدار الجبري الثاني (المطروح) تحته مع تغيير إشارات حدوده جميعها ، ثم نجري عملية الجمع كالآتي:

$-٧س^{٤} - ٥س^{٣} + ٦س^{٢} - ٧$ **المطروح منه**

$..... \ \overset{+}{-} \ ٣س^{٣} \ \overset{-}{+} \ ٢س^{٢} \ \overset{-}{+} \ ٥$ **المطروح** +

$-٧س^{٤} - ٢س^{٣} + ٤س^{٢} - ١٢$

مثال٦ : من المقدار $(٧س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥)$ اطرح المقدار $(٣س^{٢} + ٥س^{٣} + ٤س - ٩)$

الحل:

$٧س^{٣} - ٤س^{٢} + ... + ٥$ **المطروح منه**

$\overset{-}{+} \ ٥س^{٣} \ \overset{-}{+} \ ٣س^{٢} \ \overset{-}{+} \ ٤س \ \overset{+}{-} \ ٩$ **المطروح** +

$٢س^{٣} - ٧س^{٢} - ٤س + ١٤$

مثال٧ : من مجموع المقدارين $(٤س^{٢} - ٧س + ١)$ ، $(٥س + ٢س^{٢} - ٧)$ اطرح المقدار $(٢س^{٢} - ٤س + ٥)$

الحل: نجمع أولاً المقدارين الأول والثاني، ومن ناتج الجمع نطرح المقدار الثالث، فيكون ناتج الجمع في الأعلى والمطروح في الأسفل.

$٤س^{٢} - ٧س + ١$

$٢س^{٢} + ٥س - ٧$ +

$٦س^{٢} - ٢س - ٦$

ثم نقوم بعملية الطرح كالآتي:

$٦س^{٢} - ٢س - ٦$ **المطروح منه (ناتج الجمع)**

$\overset{-}{+} \ ٢س^{٢} \ \overset{+}{-} \ ٤س \ \overset{-}{+} \ ٥$ **المطروح** +

$٤س^{٢} + ٢س - ١١$

تمارين (٤ – ٣)

١) اجمع المقدارين (س^{٤} + ٢س^{٢} – ٥س + ٤) ، (س^{٣} + ٤س^{٢} – س + ٩)

٢) اطرح المقدار (٤س^{٢} – ٧س + ١) من (٥س^{٢} – ٤س + ٣)

٣) من المقدار (–٣س^{٢} + ٤س^{٤} + ٥) اطرح (٣س^{٢} – س^{٤} + ٥س^{٣} – ٩)

٤) من مجموع المقدارين (٤س^{٢} – ٧س + ٥) ، (٦س^{٢} – ٤س – ٩) اطرح المقدار (٢س^{٢} – ٣س + ٩).

٥) إذا كان ك = (س^{٢} – ٥س + ١) ، ل = (٤س^{٢} – ٢س – ٧)، جد كلاً ممَّا يأتي:

أ) ك + ل

ب) ك – ل

جـ) ل – ك

(٤–٤) ضرب المقادير الجبرية

درسنا في الصف الأول ضرب حد جبري في حد جبري، وكذلك درسنا ضرب حد جبري في مقدار جبري.

فكيف يمكن ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر؟

سوف نقتصر في دراستنا لهذا العام على نوع واحد من هذه المقادير، ألا وهو الحدانية.

الحدَّانية: **هي المقدار الجبري المؤلف من حدين.**

أما الحدودية: **فهي المقدار الجبري المؤلف من ثلاثة حدود أو أكثر.**

ضرب حدانية في حدانية:

لضرب حدانية في حدانية نستخدم خاصية التوزيع مرتين، حيث نضرب كل حد من الحدانية الأولى في كل من حدي الحدانية الثانية مع مراعاة قواعد ضرب الإشارات، ثم نجمع الحدود المتشابهة.

مثال١ : جد ناتج (س – ٥) (٢س + ٧)

الحل: (س – ٥) (٢س + ٧) = س (٢س + ٧) – ٥ (٢س + ٧)

= س×٢س + س×٧ – ٥×٢س – ٥×٧

= ٢س^{٢} + <u>٧س</u> – <u>١٠س</u> – ٣٥

= ٢س^{٢} – ٣س – ٣٥

أو: **(س – ٥) (٢س + ٧)** = س×٢س + س×٧ – ٥×٢س – ٥×٧

= ٢س^{٢} + <u>٧س</u> – <u>١٠س</u> – ٣٥

= ٢س^{٢} – ٣س – ٣٥

مثال٢ : جد ناتج (س − ٥) (س + ٥)

الحل:

(س − ٥) (س + ٥) = س^{٢} + ~~٥س~~ − ٥س − ٢٥

= س^{٢} − ٢٥

مثال٣ : جد ناتج (س − ٣) (س − ٣)

الحل:

(س − ٣) (س − ٣) = س^{٢} − ٣س − ٣س + ٩

= س^{٢} − ٦س + ٩

مثال٤ : جد ناتج ما يأتي: (٧س + ٣)(٧س + ٣)

الحل:

(٧س + ٣)(٧س + ٣) = (٧س + ٣)^{٢} = ٤٩س^{٢} + ٢١س + ٢١س + ٩ = ٤٩س^{٢} + ٤٢س + ٩

وبالطريقة نفسها فإن: **(٧س − ٣)(٧س − ٣)** = (٧س − ٣)^{٢} = ٤٩س^{٢} − ٤٢س + ٩

ملاحظة:

١− في حالة ضرب حدانيتين متشابهتين وباختلاف إشارة الحد الثاني فقط كما في مثال ٢ تكون نتيجة الضرب المباشر هي:

مربع الحد الأول − مربع الحد الثاني

ويسمى **الفرق بين المربعين**.

٢− في حالة ضرب الحدانيتين المتشابهتين (بما في ذلك بالإشارة) كما في المثالين (٣)، (٤) فتكون النتيجة المباشرة لها ثلاثة حدود وكالآتي:

مربع الحد الأول ± ٢×الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

ويسمى **المربع الكامل** وإشارة الحد الثاني تكون الإشارة نفسها بين حدي الحدانية. أما الحدان الأول والثالث فإشارتاهما موجبة دائماً.

تمارين (٤ – ٤)

١) جد ناتج ضرب الحدّانيات الآتية:

أ) (س + ٢)(س − ٤)

ب) (٣س − ٥)(٣س + ٥)

جـ) $(٤س - ١)^٢$

د) $(س^٢ + ٣)^٢$

هـ) $(٢س^٣ + ٣)(٢س^٣ - ٣)$

و) (٢س − ٣)(٢س + ٣)

٢) جد مربع كل من الحدّانيتين الآتيتين:

أ) (٣س − ٧)

ب) (٤س + ٥)

٣) إذا كان أ = (٥س + ١) ، ب = (٢س − ٣) ، جـ = (س + ٧) فجد:

١) أ × ب

٢) $ب^٢$

٣) $جـ^٢$

٤) ب × جـ

٥) جـ × أ

٦) $أ^٢$

الفصل الخامس

مبادئ الإحصاء

يختص الإحصاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات، ثم الوصول إلى نتائج وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل. ومن هذه الطرق هي المتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية والتي سنتناول منها ما يأتي:

١- الوسط الحسابي

٢- الوسيط

(٥-١) الوسط الحسابي ($\bar{س}$):

هو عبارة عن معدل مجموع قيم معينة، ويرمز له بالرمز ($\bar{س}$) ويحسب كالآتي:

$$\text{الوسط الحسابي } (\bar{س}) = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

مثال١ : جد الوسط الحسابي للقيم ٢٥، ٢٧، ٣٢، ٣٥، ٤٠، ٤٥ .

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\bar{س} = \frac{٢٥ + ٢٧ + ٣٢ + ٣٥ + ٤٠ + ٤٥}{٦} = \frac{٢٠٤}{٦} = ٣٤$$

مثال٢ : حصل حسام على الدرجات المبينة بالجدول، في مادة الرياضيات. احسب الوسط الحسابي لهذه الدرجات:

الشهر	تشرين الثاني	كانون الأول	كانون الثاني	شباط	آذار
الدرجة	٧٦	٨٢	٩٠	٨٦	٩٦

الحل:

$$\bar{س} = \frac{٧٦ + ٨٢ + ٩٠ + ٨٦ + ٩٦}{٥} = \frac{٤٣٠}{٥} = ٨٦$$

مثال٣ : متوسط ما تنفقه إحدى الأسر شهرياً يساوي (٤٥٠٠٠٠) ديناراً . كم ديناراً تصرف هذه الأسرة في السنة؟

الحل:

$$\because \text{الوسط الحسابي } (\bar{س}) = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

∴ مجموع القيم = عددها × الوسط الحسابي

∴ مجموع مصروف الأسرة قي السنة = ١٢ × ٤٥٠٠٠٠

= ٥٤٠٠٠٠٠ دينار

(٥-٢) الــوسـيـط:

وهي القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم بعد ترتيبها ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم التي قبلها مساوياً لعدد القيم التي بعدها.

فمثلاً عند ترتيب أوقات الصلاة كالآتي: { الصبح، الظهر، العصر، المغرب، العشاء} فإن صلاة العصر تكون الوسيط بين بقية الصلوات.

فــائـدة :

ذكر الله تعالى في الآية (١٤٣) التي تتوسط سورة البقرة حيث أن عدد آياتها (٢٨٦):

چڤ ڤ ڤ ڤ ڤ ڦ ڦ ڦ ڦ ڄ ڄ ڄ...چ

[البقرة: ١٤٣]

مثال١ : جد الوسيط للقيم (١٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١١ ، ١ ، ٧ ، ٩).

الحل:

نرتب هذه القيم ترتيباً تصاعدياً فتكون: (١ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢)

∴ الوسيط = ٩ (لأنها القيمة التي تتوسط هذه البيانات)

ملاحظة: إذا كان عدد القيم زوجياً أي أن هناك قيمتان تتوسطان القيم، عندئذ يكون الوسيط هو معدل هاتين القيمتين، أي مجموعهما مقسوماً على (٢)، بعد ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

أي أن:

$$\textbf{الوسيط} = \frac{\textbf{القيمة الوسطية الأولى + القيمة الوسطية الثانية}}{\textbf{٢}}$$

مثال٢ : إذا كانت درجات ثمانية طلاب في مادة الرياضيات هي:

(٥٠ ، ٧٤ ، ٦٢ ، ٦١ ، ٨٠ ، ٨٥ ، ٩٢ ، ٦٦) فما هي الدرجة الوسيطة؟

الحل: نرتب درجات الطلبة ترتيباً تنازلياً فتكون:

(٩٢، ٨٥ ، ٨٠ ، ٧٤ ، ٦٦ ، ٦٢ ، ٦١ ، ٥٠)

∵ عدد القيم زوجياً

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{\text{القيمة الوسطية الأولى + القيمة الوسطية الثانية}}{٢}$$

$$= \frac{٧٤ + ٦٦}{٢}$$

$$= \frac{١٤٠}{٢}$$

$$= ٧٠$$

تـمـا ريـن (٥ – ١)

١) جد الوسط الحسابي والوسيط للأعداد: (٣ ، ٩ ، ١٥ ، ١٢ ، ٥ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ٣٢ ، ١٧ ، ٢٢).

٢) إذا كانت درجات الاختبار اليومي الأول في شهر تشرين الثاني لمادة الرياضيات للصف الأول كالآتي: (١٤ ، ١٥ ، ١٤ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٠ ، ١١ ، ١٨ ، ١٧) فما المتوسط لتلك الدرجات؟

٣) جد الوسط الحسابي والوسيط لما يأتي من النسب المئوية للرطوبة والمسجلة في الأسبوع الأول من شهر نيسان عام ٢٠٠٧ بمدينة البصرة: (٥ ، ٤ ، ٦ ، ١١ ، ١٣ ، ٢١).

٤) إذا كانت درجات الحرارة مقاسة خلال الأسبوع الماضي كالآتي: (٣٥ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٣٦ ، ٣٨ ، ٣٩) فما الوسط الحسابي والوسيط لدرجات الحرارة خلال الأسبوع؟

٥) يوضح الجدول الآتي عدد زوار إحدى الحدائق العامة خلال أيام الأسبوع:

اليوم	**السبت**	**الأحد**	**الاثنين**	**الثلاثاء**	**الأربعاء**	**الخميس**	**الجمعة**
عدد الزوار	٢٠٠	٣١٥	٤٢٥	٣٧٥	٢٨٠	٤٢٠	٦٤٥

احسب الوسط الحسابي لعدد الزوار ثم حدّد الوسيط.

٦) مدرسة فيها (٤) صفوف، في الصف الأول (٤٨٠) تلميذاً، وفي الصف الثاني (٣٥٠) تلميذاً، وفي الصف الثالث (٣٨٠) تلميذاً. وإذا كان متوسط عدد التلاميذ في الصف الواحد (٤٠٠) تلميذاً، فما عدد تلاميذ الصف الرابع؟

الفهرست

تم و لله الحمد